УДК 517.958, 62.50

Баскаков А.В., Волков Н.П.
(Москва)

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Аннотация. В работе рассмотрены линейная и нелинейная задачи управления для нестационарного многоскоростного анизотропного кинетического уравнения переноса. Найдены достаточные условия существования и единственности обобщенных решений исследуемых задач управления в различных функциональных пространствах. Доказаны соответствующие теоремы. При доказательстве этих теорем приведены оценки, из которых следует, что решения рассмотренных задач управления могут быть получены методом последовательных приближений.
Ключевые слова: задача управления, нестационарное многоскоростное анизотропное кинетическое уравнение переноса, теорема существования и единственности, обобщенное решение, метод последовательных приближений.

A. Baskakov, N.Volkov
(Moscow)

ON SOME CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF CONTROL PROBLEMS FOR THE TIME-DEPENDENT KINETIC TRANSPORT EQUATION

Abstract. In the article linear and nonlinear control problems for the time-dependent multi-speed anisotropic kinetic transport equation are considered. The author found sufficient conditions for the existence and uniqueness of the generalized solutions of the investigated problems in various functional spaces. By proving the corresponding theorems it was shown that solutions of the investigated control problems can be obtained by the method of successive approximations.
Key words: control problem, time-dependent multi-speed anisotropic kinetic transport equation, unique existence theorem, generalized solution, method of successive approximations.

В данной работе рассмотрим постановку и приведем достаточные условия разрешимости в обобщенном смысле ряда задач управления для нестационарного многоскоростного анизотропного кинетического уравнения (линейный случай уравнения Больцмана)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + (\boldsymbol{v},\nabla_x)u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) =$$

$$= \int_{\mathrm{V}} J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',t)u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}',t)d\boldsymbol{v}' + F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t), \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \in \mathrm{D} = \mathrm{G}\times\mathrm{V}\times(0,T).$$

В рамках математического моделирования физических процессов (таких, как перенос частиц в веществе [1], распространение γ-излучения, прохождение света через атмосферы звезд и планет, томография [3] и другие) рассмотрим некоторые задачи управления переходными процессами в ядерных реакторах, где функция $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ описывает плотность распределения частиц (нейтронов), пролетающих через точку $\boldsymbol{x}\in \mathrm{G}$ со скоростью $\boldsymbol{v}\in \mathrm{V}$ в момент времени $t\in(0,T)$. Функции $\Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$, $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',t)$, $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ характеризуют свойства среды, в которой происходит процесс массопереноса. При этом $\Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ называется коэффициентом поглощения, $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',t)$ – индикатрисой рассеяния, $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ – плотностью источников излучения. Строго выпуклая область G является областью изменения пространственных координат; замкнутое множество V, лежащее в шаровом слое $\{0<v_0\le|\boldsymbol{v}|\le v_1<\infty\}$, есть множество изменения скоростей $\boldsymbol{v}$ излучаемых частиц.

Пусть рассматриваемый процесс протекает при отсутствии внешних источников исследуемых частиц, т. е., например, стенки реактора не пропускают внешнего излучения. Этот факт математически выражается следующим краевым условием:

$$u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)=0, \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\in\gamma_-\times[0,T], \qquad (2)$$

где $\gamma_- = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\partial\mathrm{G}\times\mathrm{V} : (\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}_x)<0\}$, а $\boldsymbol{n}_x$ – вектор внешней нормали к границе $\partial\mathrm{G}$ области G в точке $\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим одну из задач управления переходными процессами.

Задача 1. Найти достаточные условия на исходные данные, при которых рассматриваемый процесс из начального состояния

$$u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0)=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\overline{\mathrm{G}}\times\mathrm{V} \qquad (3)$$

может быть переведен за фиксированное время $t_1 \in (0,T]$ в целевое состояние

$$u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t_1) = \psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \overline{\mathrm{G}} \times \mathrm{V}, \qquad (4)$$

управляя при этом стационарной частью $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ функции источников

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t), \qquad (5)$$

где f – допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а g – заданная функция (функция коррекции).

Замечание 1. Роль начальных условий в задачах управления переходными процессами могут играть некоторые стационарные состояния реактора.

Проведем исследование поставленной задачи в следующих функциональных пространствах:

1) $H_\infty(\mathrm{D})$ – пространства функций u, принадлежащих классу $L_\infty(\mathrm{D})$ вместе со своими обобщенными производными $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $(\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u$ на D и обладающих следами $u|_{\Gamma_-}$ на $\Gamma_- = \gamma_- \times (0,T)$ из $L_\infty(\Gamma_-)$, т. е.

$$H_\infty(\mathrm{D}) = \left\{ u \in L_\infty(\mathrm{D}) : \frac{\partial u}{\partial t}, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u \in L_\infty(\mathrm{D}), u|_{\Gamma_-} \in L_\infty(\Gamma_-) \right\},$$

которое является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{H_\infty} = \left[\|u\|_{\infty,\mathrm{D}} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\infty,\mathrm{D}} + \|(\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u\|_{\infty,\mathrm{D}} + \left\| u|_{\Gamma_-} \right\|_{\infty,\Gamma_-} \right] < \infty .$$

2) $H_p(\mathrm{D})$ $(1 < p < \infty)$ – пространство функций u из $L_p(\mathrm{D})$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $(\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u$ из $L_p(\mathrm{D})$ и обладающих следами $u|_{\Gamma_-}$ на Γ_- из $L_p(\Gamma_-)$, т. е.

$$H_p(\mathrm{D}) = \left\{ u \in L_p(\mathrm{D}) : \frac{\partial u}{\partial t}, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u \in L_p(\mathrm{D}), u|_{\Gamma_-} \in L_p(\Gamma_-) \right\},$$

являющееся банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{H_p} = \left[\|u\|^p_{p,\mathrm{D}} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{p,\mathrm{D}} + \|(\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})u\|^p_{p,\mathrm{D}} + \left\|u|_{\Gamma_-}\right\|^p_{p,\Gamma_-} \right]^{1/p} < \infty .$$

Здесь $\|\bullet\|_{\infty,\mathrm{D}}$ и $\|\bullet\|_{p,\mathrm{D}}$ – нормы в пространствах $L_\infty(\mathrm{D})$ и $L_p(\mathrm{D})$ соответственно.

Решение поставленной задачи управления дает следующая теорема.

Теорема 1. *Поставленная задача 1 однозначно разрешима, т. е. существует единственное управляющее воздействие* $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ *из* $L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$, *переводящее рассматриваемый процесс из начального состояния* (3) *в целевое состояние* (4), *если выполняются следующие условия (достаточные):*

1) исходные данные задачи 1 принадлежат функциональным пространствам: $\Sigma, \dfrac{\partial\Sigma}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D})$; $J, \dfrac{\partial J}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D}; L_2(\mathrm{V}))$; $\varphi, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})\varphi \in L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$, $\varphi|_{\gamma_-} \in L_\infty(\gamma_-)$; $\psi, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})\psi \in L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$, $\psi|_{\gamma_-} \in L_\infty(\gamma_-)$; $g, \dfrac{\partial g}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D})$;

2) выполнены условия согласования $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0$ *и* $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0$ *при* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \gamma_-$ *;*

3) имеют место ограничения типа неравенств: $|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t_1)| \ge g_0 > 0$ *при* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \overline{\mathrm{G}}\times\mathrm{V}$, *а также* $\dfrac{\mathrm{diamG}}{v_0} < a$, *где постоянная*

$$a = \min\left\{ t_1, \left(\|\Sigma\| + \sqrt{\mathrm{m}(\mathrm{V})}\|J\|\right)^{-1}, \left(\sqrt{\mathrm{C}^4+1} - \mathrm{C}^2\right) \right\},$$

$\mathrm{C} = \left(5t_1 + g_0^{-2} + 3\right)\max\left\{\left(\|\Sigma\|^2 + \quad + \mathrm{m}(\mathrm{V})\|J\|^2\right), \|g\|^2\right\}$, $\mathrm{m}(\mathrm{V})$ – *мера множества* V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии $\dfrac{\mathrm{diamG}}{v_0} < a_1$ решение задачи 1 эквивалентно в классе $f \in L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$, $u \in H_\infty(\mathrm{D})$ решению системы интегральных уравнений:

$$u(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t) = \Phi(\xi,\boldsymbol{y},\boldsymbol{v},t) + \int_{\eta}^{\xi}\Big[(Pu)(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v},\theta-\xi+t) + f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v},\theta-\xi+t)\Big]d\theta, \qquad (6)$$

$$f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v}) = \left[g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t_1)\right]^{-1}\Big\{(\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})\psi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v}) - (P\psi)(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t_1) + \int_{\zeta_-}^{\xi}\left[\frac{\partial(Pu)}{\partial t}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v},\theta-\xi+t_1) + f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v})\frac{\partial g}{\partial t}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\theta,\boldsymbol{v},\theta-\xi+t_1)\right]d\theta\Big\}. \qquad (7)$$

Здесь

$$\Phi(\xi,\boldsymbol{y},\boldsymbol{v},t) = \begin{cases}\varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}(\xi-t),\boldsymbol{v}) & \text{при } 0\le t\le \xi-\zeta_-, \quad \zeta_-\le\xi\le\zeta_+,\\ 0 & \text{при } \xi-\zeta_-\le t\le t_1, \quad \zeta_-\le\xi\le\zeta_+;\end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases}\xi - t & \text{при } 0\le t\le\xi-\zeta_-, \quad \zeta_-\le\xi\le\zeta_+,\\ \zeta_- & \text{при } \xi-\zeta_-\le t\le t_1, \quad \zeta_-\le\xi\le\zeta_+;\end{cases}$$

$$(Pu)(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t) = -\Sigma(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t)u(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},t) + \int_{\mathrm{V}} J(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',t)u(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi,\boldsymbol{v}',t)d\boldsymbol{v}';$$

$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\xi = \boldsymbol{x}$ – характеристическая прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{v}$, ξ – параметр из отрезка $[\zeta_-,\zeta_+]$, при этом $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\zeta_\pm \in \partial\mathrm{G}$, и $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\zeta_- \in \gamma_-$. Метод перехода от исследования задачи управления к исследованию системы интегральных уравнений ранее был предложен в работе [2] для исследования обратных задач для нестационарного кинетического уравнения переноса.

Для упрощения записи перейдем теперь к исследованию системы интегральных уравнений (6), (7), записав ее в операторной форме

$$\{u,f\} = \mathcal{A}\{u,f\} = \{\mathcal{A}_1\{u,f\},\mathcal{A}_2\{u,f\}\}, \qquad (8)$$

где $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – операторы правых частей уравнений (6) и (7) соответственно. При этом оператор $\mathcal{A}$ непрерывно отображает пространство $\mathrm{W}_\infty = H_\infty(\mathrm{D})\times L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$ в себя, поскольку значение $\mathcal{A}_1\{u,f\}$ имеет обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{A}_1\{u,f\})$ и

$(\boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}})\left(\mathcal{A}_1\{u, f\}\right)$, которые в силу условий, наложенных на данные поставленной задачи, принадлежат вместе с $\mathcal{A}_1\{u, f\}$ пространству $L_\infty(\mathrm{D})$, а след $\left(\mathcal{A}_1\{u, f\}\right)\big|_{\Gamma_-}$ – пространству $L_\infty(\Gamma_-)$; а значение $\mathcal{A}_2\{u, f\}$ является элементом пространства $L_\infty(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$.

Исследуем на сжимаемость оператора $\mathcal{A}$, и его вторую степень. Для этого возьмем два произвольных элемента $\{u_1, f_1\}$, $\{u_2, f_2\}$ из пространства W_∞ и оценим следующую норму

$\left\|\mathcal{A}\{u_1, f_1\} - \mathcal{A}\{u_2, f_2\}\right\|_{\mathrm{W}_\infty}$, найдя предварительно оценки норм

$\left\|\mathcal{A}_1\{u_1, f_1\} - \mathcal{A}_1\{u_2, f_2\}\right\|_{\infty,\mathrm{D}}$, $\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{A}_1\{u_1, f_1\}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{A}_1\{u_2, f_2\}\right)\right\|_{\infty,\mathrm{D}}$,

$\left\|(\boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}})\left(\mathcal{A}_1\{u_1, f_1\}\right) - (\boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}})\left(\mathcal{A}_1\{u_2, f_2\}\right)\right\|_{\infty,\mathrm{D}}$,

$\left\|\left(\mathcal{A}_2\{u_1, f_1\}\right) - \left(\mathcal{A}_2\{u_2, f_2\}\right)\right\|_{\infty,\mathrm{G}\times\mathrm{V}}$.

Окончательно получим оценку исследуемой нормы в виде

$$\left\|\mathcal{A}\{u_1, f_1\} - \mathcal{A}\{u_2, f_2\}\right\|_{\mathrm{W}_\infty} \le \frac{\mathrm{diamG}}{v_0}\mathrm{C}_1\left\|\{u_1 - u_2, f_1 - f_2\}\right\|_{\mathrm{W}_\infty} + \\ + \mathrm{C}_1\left(\left\|u_1 - u_2\right\|_{\infty,\mathrm{D}} + \left\|f_1 - f_2\right\|_{\infty,\mathrm{G}\times\mathrm{V}}\right).$$

Эта оценка показывает, что первая степень оператора $\mathcal{A}$ не является сжимающей. Исследуем вторую степень этого оператора и оценим следующую норму разности

$$\left\|\mathcal{A}^2\{u_1, f_1\} - \mathcal{A}^2\{u_2, f_2\}\right\|_{\mathrm{W}_\infty} \le \left[\left(\frac{\mathrm{diamG}}{v_0}\right)^2 + \\ + 2\left(\frac{\mathrm{diamG}}{v_0}\right)\right]\mathrm{C}\left\|\{u_1 - u_2, f_1 - f_2\}\right\|_{\mathrm{W}_\infty}.$$

Из этого неравенства видно, что при $\dfrac{\mathrm{diamG}}{v_0} < a_2 = \sqrt{\mathrm{C}^4 + 1} - \mathrm{C}^2$ оператор $\mathcal{A}^2$ является сжимающим.

Таким образом, существует единственный элемент $\{u, f\}$ из пространства W_∞, являющийся решением операторного уравнения

$\{u, f\} = \mathcal{A}\{u, f\}$, а, следовательно, и системы интегральных уравнений (6), (7). Тогда при $\left(\frac{\mathrm{diamG}}{v_0}\right) < a = \min\{a_1, a_2\}$ существует единственное решение $f(x, v)$ задачи 1 в пространстве $L_\infty(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Поставленная задача однозначно разрешима и в классе $L_p(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$, о чем свидетельствует следующая теорема 2.

Теорема 2. *У поставленной задачи 1 существует единственное обобщенное управляющее воздействие* $f(x, v)$ *из пространства* $L_p(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$, *переводящее исследуемый процесс из начального состояния* (3) *в целевое состояние* (4), *если выполнены следующие достаточные условия:*

1) исходные данные задачи 1 принадлежат следующим функциональным пространствам: $\Sigma, \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D})$; $J, \frac{\partial J}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D}; L_p(\mathrm{V}))$; $\varphi, (v, \nabla_x)\varphi \in L_p(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$, $\varphi|_{\gamma_-} \in L_p(\gamma_-)$; $\psi, (v, \nabla_x)\psi \in L_p(\mathrm{G} \times \mathrm{V})$, $\psi|_{\gamma_-} \in L_p(\gamma_-)$; $g, \frac{\partial g}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{G} \times \mathrm{V}; L_p(0, t_1))$;

2) выполнены условия согласования $\varphi(x, v) = 0$ *и* $\psi(x, v) = 0$ *при* $(x, v) \in \gamma_-$;

3) имеют место ограничения в виде неравенств: $\left|g(x, v, t_1)\right| \geq g_0 > 0$ *при* $(x, v) \in \overline{\mathrm{G}} \times \mathrm{V}$, *а также* $\frac{\mathrm{diamG}}{v_0} < a_3$, *где* a_3 *– постоянная, зависящая от норм* $\|\Sigma\|$, $\|J\|$, $\|g\|$ *в соответствующих пространствах и чисел* t_1, g_0, $\mathrm{m}(\mathrm{V})$, *здесь* $\mathrm{m}(\mathrm{V})$ *– мера множества* V.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 3. Задача 1 поиска распределенного управляющего воздействия функции источников с математической точки зрения является линейной.

Рассмотрим теперь нелинейную задачу управления переходными процессами.

Задача 2. Найти достаточные условия на исходные данные, при которых исследуемый процесс из начального состояния, описываемого формулой (3):

$$u(x,v,0)=\varphi(x,v), \qquad (x,v)\in\overline{G}\times V ,$$

можно перевести за фиксированное время $t_1\in(0,T]$ в целевое состояние, описываемое формулой (4):

$$u(x,v,t_1)=\psi(x,v), \qquad (x,v)\in\overline{G}\times V ,$$

управляя при этом стационарной частью $\sigma(x,v)$ коэффициента поглощения

$$\Sigma(x,v,t)=\sigma(x,v)g_1(x,v,t), \tag{9}$$

где σ – допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а g_1 – заданная функция (функция коррекции).

Прежде, чем ответить на поставленный вопрос из задачи 2, введем множества допустимых состояний и допустимых управляющих воздействий. Обозначим через U – множество функций состояния $u(x,v,t)$ из пространства $H_\infty(D)$, для которых удовлетворяются следующие фазовые ограничения: $\|u\|_{\infty,D}\le c_1$, $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\infty,D}\le c_2$, $\|(v,\nabla_x)u\|_{\infty,D}\le c_3$; а через Ω – множество допустимых управляющих воздействий $\sigma(x,v)$, для которых $\|\sigma\|_{\infty,G\times V}\le c_4$.

Решение исследуемой задачи 2 содержится в теореме 3.

Теорема 3. *У исследуемой задачи 2 существует единственное обобщенное управляющее воздействие $\sigma(x,v)$ из множества Ω, с помощью которого рассматриваемый процесс может быть переведен из начального состояния* (3) *в целевое состояние* (4), *если выполнены следующие достаточные условия:*

1) исходные данные задачи 1 принадлежат следующим функциональным пространствам: $J,\dfrac{\partial J}{\partial t}\in L_\infty(D;L_2(V))$; $F,\dfrac{\partial F}{\partial t}\in L_\infty(D)$;

$\varphi, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})\varphi \in L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$, $\varphi\big|_{\gamma_-} \in L_\infty(\gamma_-)$; $\psi, (\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}})\psi \in L_\infty(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$,

$\psi\big|_{\gamma_-} \in L_\infty(\gamma_-)$; $g_1, \dfrac{\partial g_1}{\partial t} \in L_\infty(\mathrm{D})$;

2) выполнены условия согласования $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0$ *и* $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0$ *при* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \gamma_-$ *;*

3) имеют место ограничения типа неравенств: $\left|g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t_1)\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\right| \geq g_{10} > 0$ *при* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \overline{\mathrm{G}}\times\mathrm{V}$, *а также* $\dfrac{\mathrm{diam}\mathrm{G}}{v_0} < b$,

где b *– постоянная, зависящая от норм* $\|J\|$, $\|g_1\|$, $\|F\|$, $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ *в соответствующих пространствах и чисел* t_1, g_{10}, $\mathrm{m}(\mathrm{V})$, *здесь* $\mathrm{m}(\mathrm{V})$ *– мера множества* V.

Идея доказательства этой теоремы состоит в сведении задачи управления 2 при ограничениях типа малости величины $\dfrac{\mathrm{diam}\mathrm{G}}{v_0}$ к системе интегральных уравнений второго рода для пары $\{u,\sigma\}$. Далее, как и при доказательстве теоремы 1, исследуется оператор правых частей этой системы интегральных уравнений на сжимаемость. Оказывается, этот оператор не является сжимающим, но его вторая степень будет сжимающим на множестве $\mathrm{U}\times\Omega$, если $\dfrac{\mathrm{diam}\mathrm{G}}{v_0} < \mathrm{C}$, где C – некоторая константа, зависящая от норм $\|J\|$, $\|g_1\|$, $\|F\|$, $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ и чисел t_1, g_{10}, $\mathrm{m}(\mathrm{V})$.

Следовательно, существует единственное решение $\{u,\sigma\} \in \mathrm{U}\times\Omega$ системы интегральных уравнений, а значит, и единственное решение $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ задачи 2.

Задача управления 2 однозначно разрешима также в классе $L_p(\mathrm{G}\times\mathrm{V})$ при фазовых ограничениях $\|u\|_{p,\mathrm{D}} \leq \mathrm{c}_5$, $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right\|_{p,\mathrm{D}} \leq \mathrm{c}_6$,

$\|(\boldsymbol{v},\nabla_x)u\|_{p,\mathrm{D}} \le \mathrm{c}_7$ на функцию $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ и $\|\sigma\|_{p,\mathrm{G}\times\mathrm{V}} \le \mathrm{c}_8$ на функцию $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$.

Итак, в данной работе рассмотрено исследование линейной (задача 1) и нелинейной (задача 2) задач управления функцией источников и коэффициентом поглощения для нестационарного многоскоростного анизотропного кинетического уравнения переноса. Получены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения поставленных задач управления. Доказательство теоремы 1 позволяет заключить, что искомое обобщенное решение может быть найдено методом последовательных приближений. Метод доказательства приведенных теорем позаимствован из работ [2], [4] для определения обобщенных решений обратных задач для уравнения вида (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.*, Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. – М.: Наука, 1987. – 158 с.

2. *Марчук Г.И.* Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. – 667 с.

3. *Прилепко А.И.*, Волков Н.П. Обратные задачи определения параметров нестационарного кинетического уравнения переноса по дополнительной информации о следах искомой функции // Дифференциальные уравнения, 1988. – Том 24. – № 1. С. 136-146.

4. *Volkov N.P.* On Some Inverse Problems for Time-Dependent Transport Equation // ILL-Posed Problems in Natural Sciences. – Moscow: TVP-VSP, 1992. – P. 431-438.