УДК 517.95

Акимов А.А.
(г. Стерлитамак)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

Аннотация. Рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием типа Неймана в смешанной области для уравнения Чаплыгина. Данная задача возникает при исследовании обтекания крылового профиля потоком газа. В работе методом вспомогательных функций получена новая теорема единственности решения этой задачи с видоизмененным условием Франкля для такого типа задач, без каких-либо ограничений, кроме гладкости, на эллиптическую часть границы области.
Ключевые слова: метод вспомогательных функций, уравнение Чаплыгина, условие Неймана, уравнения смешанного типа.

A. Akimov
(Sterlitamak)

ON THE SOLUTION UNICITY OF NEUMANN TYPE FOR CHAPLYGIN EQUATION

Abstract. The article deals with the boundary-value problem for mixed type equations with Neumann boundary conditions in a mixed area for the Chaplygin equation. This problem arises in the study of a gas flow around an airfoil. While using the method of auxiliary functions the authors obtain a new uniqueness theorem to solve this problem with the modified Frankl condition for this type of problems without any restrictions other than smoothness on the elliptical part of the border area.
Key words: method of auxiliary functions, the Chaplygin equation, the Neumann condition, mixed type equations.

Рассматривая задачу набегания сверхзвуковой струи на клин, имеющий проницаемую поверхность, в случае, когда перед ним образуется зона дозвуковых скоростей, для избежания появления ударных волн используется краевое условие с наклонной производной. Одной из первых работ, где была поставлена подобная задача, явилась работа К. Моравец [3].

Рассмотрим уравнение

$$Lu = K(y)z_{xx} + z_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0), l > 0,$ и характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (1) при $y < 0$:

$$\gamma_1 : \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 0,$$

$$\gamma_2 : \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = l,$$

где $K(y) \in C[y_c, 0] \cap C^2[y_c, 0),$ y_c - ордината точки С пересечения характеристик γ_1 и γ_2. Положим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача типа Неймана. Найти функцию $z(x, y)$ на множестве $D_+ \cup D_-$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$z(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$Lz(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$\delta_s[z]|_\Gamma = Kz_x \frac{dy}{ds} - z_y \frac{dx}{ds} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l; \tag{4}$$

$$\delta_x[z]|_{\gamma_1} = \sqrt{-K}z_x - z_y = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{5}$$

где φ и ψ - заданные достаточно гладкие функции.

Следуя работе Проттера [4], получим доказательство единственности решения задачи (2) − (5) для уравнения (1). Введем в рассмотрение новую функцию

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -z_y dx + K(y)z_x dy. \tag{6}$$

Эта функция является в D решением уравнения

$$L_0 v = v_{xx} + \left(\frac{v_y}{K(y)} \right)_y = 0 \tag{7}$$

и обращается в нуль на кривых Γ и γ_1.

Определение. *Регулярным решением уравнения* (7) *в области* D *назовем функцию* $v(x,y)$ *,которая удовлетворяет условиям* (2) *и* (7)*, и к интегралам*

$$\iint_D vL_0 v dxdy,\quad \iint_D v_x L_0 v dxdy,\quad \iint_D v_y L_0 v dxdy$$

можно применить формулу Грина.

Зададим следующую функцию

$$F(y) = 2\left(\frac{K}{K'}\right) + 1.$$

Приведенное ниже утверждение является более общим результатом по сравнению с теоремой 6, приведенной в работе [1].

Теорема. *Пусть:* 1) $K(y) \in C^2[y_c, 0)$, $K(0) = 0, K'(y) \neq 0$ *при* $y < 0, F(0) > 0$; 2) *существует постоянная* $d > 0$ *такая, что* $F(y) > -d[-K(y)]^{\alpha}$ *в области* D_-*;* 3) $v(x,y)$ *− регулярное в* D *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* $v = 0$ *на* Γ *и* γ_1*. Тогда* $v(x,y) \equiv 0$ *в* D .

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\iint_D (av + bv_x + cv_y)\left(v_{xx} + \left(\frac{v_y}{K(y)}\right)_y\right) dxdy = 0, \qquad (8)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ некоторые заданные функции. Выполним преобразования слагаемых в подынтегральном выражении по следующим формулам:

$$cv_y\left(\frac{v_y}{K(y)}\right)_y = \frac{1}{2}c\left(\frac{v_y^2}{K(y)}\right)_y + \frac{1}{2}\frac{cK'(y)v_y^2}{K^2(y)} - \frac{1}{2}\frac{c_y v_y^2}{K(y)},$$

$$bv_x\left(\frac{v_y}{K(y)}\right)_y = \left(bv_x\frac{v_y}{K(y)}\right)_y - \frac{1}{2}\left(b\frac{v_y^2}{K(y)}\right)_x + \frac{1}{2}\frac{b_x v_y^2}{K(y)} - \frac{b_y v_x v_y}{K(y)},$$

$$av\left(\frac{v_y}{K(y)}\right)_y = \left(av\frac{v_y}{K(y)}\right)_y - \frac{1}{2}\left(a_y\frac{v^2}{K(y)}\right)_y +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a_{yy}v^2}{K(y)}-\frac{1}{2}\frac{a_y v^2 K'(y)}{K^2(y)}-\frac{av_y^2}{K(y)},$$

$$avv_{xx}=(avv_x)_x-\frac{1}{2}(a_x v^2)_x+\frac{1}{2}a_{xx}v^2-av_x^2,$$

$$bv_x v_{xx}=\frac{1}{2}(bv_x^2)_x-\frac{1}{2}b_x v_x^2,$$

$$cv_y v_{xx}=(cv_y v_x)_x-\frac{1}{2}(cv_x^2)_y+\frac{1}{2}c_y v_x^2-c_x v_x v_y.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (8), получим:

$$0=\iint_D\left[\frac{1}{2}\left(a_{xx}+\left(\frac{a_y}{K(y)}\right)_y\right)v^2-a\left(v_x^2+\frac{v_y^2}{K(y)}\right)-\frac{1}{2}b_x\left(v_x^2-\frac{v_y^2}{K(y)}\right)-\right.$$

$$\left.-b_y\frac{v_x v_y}{K(y)}+\frac{1}{2}c_y v_x^2-c_x v_x v_y-\frac{1}{2}c_y\frac{v_y^2}{K(y)}+\frac{1}{2}cv_y^2\frac{K'(y)}{K^2(y)}\right]dxdy+$$

$$+\int_{\Gamma+\gamma_1+\gamma_2}\left[-av\frac{v_y}{K(y)}+\frac{1}{2}a_y\frac{v^2}{K(y)}-bv_x\frac{v_y}{K(y)}+\frac{1}{2}\left(cv_x^2-\frac{v_y^2}{K(y)}\right)\right]dx+$$

$$+\left[avv_x-\frac{1}{2}a_x v^2+cv_x v_y+\frac{1}{2}b\left(v_x^2-\frac{v_y^2}{K(y)}\right)\right]dy=J_1+J_2.$$

Пусть решение $v(x,y)=0$ на Γ и γ_1. Зададим в области D_+ функции $b=c\equiv 0$. Тогда интеграл J_2 в силу равенств

$$dx=-\sqrt{-K}\,dy\ (на\ \gamma_1),\ \ dx=\sqrt{-K}\,dy\ (на\ \gamma_2)$$

запишется в виде:

$$J_2=\frac{1}{2}\int_{\gamma_1}\frac{1}{K(y)}(b-c\sqrt{-K})(\sqrt{-K}\,v_x dx+v_y dy)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{1}{K}(b+c\sqrt{-K})(\sqrt{(-K)}v_x^2+2v_xv_y+\frac{1}{\sqrt{-K}}v_y^2)dx-$$

$$-\int_{\gamma_2}\frac{a}{\sqrt{-K}}vdv-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-K}}v^2(a_xdx+a_ydy)=I_1+I_2+I_3.$$

Так как $v=0$ на γ_1, то $v_xdx+v_ydy=0$ вдоль γ_1, и поэтому $I_1=0$. Интеграл J_1 представим в виде суммы следующих трех интегралов:

$$J_1=-\iint_{D_+}a\left(v_x^2+\frac{v_y^2}{K(y)}\right)dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{D_-}\left[(2a+b_x-c_y)v_x^2+2v_xv_y\left(\frac{b_y}{K(y)}+c_x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2a}{K(y)}-\frac{b_x}{K(y)}+\frac{c_y}{K(y)}-\frac{cK'(y)}{K(y)^2}\right)v_y^2\right]dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\left(a_{xx}+\left(\frac{a_y}{K(y)}\right)_y\right)v^2dxdy=I_4+I_5+I_6.$$

Выберем функции $a(x,y), b(x,y),$ и $c(x,y)$ так, чтобы все интегралы $I_2, I_3, ..., I_6$ были неположительны. Поскольку их сумма равна нулю, то каждый из них в отдельности равен нулю. Из $I_4=0$ получим, что $v(x,y)=0$ в D_+, в частности, $v(x,0)=0$ и $\frac{\partial v(x,0)}{\partial y}=0,$ а тогда из единственности решения задачи Коши $v(x,y)\equiv 0$ в D_-. В итоге, получим $v(x,y)\equiv 0$ в области $D,$ а из (6) будет следовать, что $u(x,y)\equiv const$ в $D.$

При $y<0,$ следуя [2], положим

$$c=\frac{4aK(y)}{K'(y)},\qquad b=-c\sqrt{-K(y)}. \tag{9}$$

Тогда интеграл $I_2=0.$ Интегрируя I_3 по частям, будем иметь

$$I_3 = \int_{\gamma_2} \frac{-1}{K(y)}\left(-\sqrt{-K}\,a_x - a_y + \frac{aK'}{4K}\right)v^2\,dx.$$

Интеграл I_3 будет неположительным, если

$$-\sqrt{-K}\,a_x - a_y + \frac{aK'}{4K} \le 0 \quad при \quad y \le 0. \tag{10}$$

Интеграл I_5 будет неположителен, если

$$(Kc_x + b_y)^2 \le (2a + b_x - c_y)(2aK - Kb_x + (Kc)_y) \quad при \quad y \le 0, \tag{11}$$

и

$$2a + b_x - c_y \ge 0 \quad когда \quad y \le 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что неравенство (11) выполняется при любых $a(x, y)$, а неравенство (12) после подстановки функций $b(x, y)$ и $c(x, y)$, заданных по формуле (9), примет вид:

$$\sqrt{-K}\,a_x + a_y + a\frac{K'}{2K}F(y) \le 0. \tag{13}$$

Рассмотрим два различных случая.

Случай 1. $F(y) > 0$ при всех $y \le 0$. Тогда для того, чтобы все интегралы были неположительны, за $a(x, y)$ примем любую положительную постоянную.

Случай 2. $F(y)$ принимает отрицательные значения при $y < 0$. В этом случае положим

$$a = \begin{cases} e^{\beta[-K(y)]^{\alpha}}, & y \le 0, \\ 1, & y \ge 0, \end{cases}$$

где α, β − положительные постоянные. В этом случае неравенства (10), (13) после подстановки функции $a(x, y)$ и последующих преобразований примут вид

$$\frac{1}{4} - \alpha\beta[-K(y)]^{\alpha} \ge 0, \tag{14}$$

$$F(y) + 2\alpha\beta[-K(y)]^{\alpha} \ge 0. \tag{15}$$

Чтобы интеграл I_6 был неположительным, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$a_{xx} + \left(\frac{a_y}{K(y)}\right)_y \le 0. \tag{16}$$

После подстановки функции $a(x,y)$ в (14) получим следующее неравенство

$$F(y)-2\alpha\beta[-K(y)]^{\alpha}-2\alpha+1\le 0. \qquad (17)$$

Неравенства (14), (15), (17) будут выполнены, если, в частности, положить

$$\alpha > max\frac{F(y)+1}{2}$$

$$\beta=\frac{1}{\alpha[-K(y_{min})]^{\alpha}}$$

Нетрудно видеть, что и интеграл I_4 также неположителен. Отсюда будет следовать, что $v(x,y)\equiv 0$.

Литература:

1. *Сабитов К. Б., Акимов А. А.* К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. − 2001. № 10. − С. 73−80.
2. *Смирнов М.М*. Уравнения смешанного типа. − М.: Наука, 1970. – 304 с.
3. *Morawetz C.S.* A uniqueness theorem for Francl's problem // Commun. Pure and Appl. Math. − 1954. − № 7. − P. 697−700.
4. *Protter M.H.* Uniqueness theorems for the Tricomi problem // J. Rational Mech. and Analysis. Part I, 2, 1. − 1953. − P. 107–114.