УДК 517.958: 530.145



# ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ В КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

***Аннотация.*** Получены корректные формулы для вычисления по¬перечной электрической проводимости и поперечной диэлектриче¬ской проницаемости в квантовой столкновительной плазме при про¬извольной степени вырождения электронного газа. Для этого ис¬пользовалось кинетическое уравнение Вигнера Власова Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК модели (Бхатнагар, Гросс и Крук) в координатном пространстве. Исследованы различ¬ные частные случаи. Отдельно рассмотрен случай полностью вырожденнной квантовой плазмы. Приводится сравнение с формулой, полученной Линдхардом.

***Ключевые слова:*** столкновительная плазма, уравнение Шредингера, уравнение Вигнера Власова Больцмана, интеграл столк¬новений, проводимость, проницаемость, функция Линдхарда.



# TRANSVERSE ELECTRIC CONDUCTIVITY OF QUANTUM COLLISIONAL PLASMAS

***Abstract.*** The article presents the formulae for calculation of transverse dielectric function and transverse electric conductivity in quantum collisional plasmas under arbitrary degree of degeneracy of the electron gas. To derive the formulae the Wigner Vlasov Boltzmann kinetic equation with collision integral in BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) form in coordinate space has been used. The research of various particular cases has been done. The case of fully degenerated quantum plasma has been studied separately. The article gives the comparison with Lindhard's formula.

***Key words:*** collisional plasma, Schrödinger equation, Wigner Vlasov Boltzmann kinetic equation, collision integral, conductivity, pellucidity, Lindhard function.

В настоящей работе выводятся формулы для вычисления электрической проводимости и диэлектрической проницаемости в квантовой столкновительной плазме при произвольной температуре, то-есть при произвольной степени вырождения электронного газа. При выводе кинетического уравнения нами обобщается подход, развитый Климонтовичем и Силиным [1].

Диэлектрическая проницаемость в бесстолкновительной квантовой газовой плазме изучалась многими авторами [1–10]. В работе [6], где исследован одномерный случай квантовой плазмы, отмечалась важность вывода диэлектрической проницаемости с использованием квантового кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме БГК–модели (Бхатнагар, Гросс, Крук) [11;12]. Настоящая работа посвящена выполнению этой задачи.

Диэлектрическая проницаемость является одной из важнейших характеристик плазмы. Эта величина необходима для описания скин – эффекта [13], для анализа поверхностных плазмонов [14], для описания процесса распространения и затухания плазменных поперечных колебаний [10], для изучения механизма проникновения электромагнитных волн в плазму [9], и для анализа других проблем в физике плазмы [15–19].

Кливер и Фукс [4] первыми заметили, что выведенная Линдхардом диэлектрическая функция для квантовой плазмы в столкновительном режиме не переходит в диэлектрическую функцию для классической плазмы в пределе, когда постоянная Планка $\hbar$ стремится к нулю. Это значит, что диэлектрическая функция Линдхарда не учитывает корректно столкновения электронов. Кливер и Фукс "подправили руками" диэлектрическую функцию Линдхарда так, чтобы она переходила в классическую при $\hbar \to 0$.

В работах [14;15] полученная ими диэлектрическая функция была применена для рассмотрения разнообразных вопросов оптики металла.

В работе [5] был проведен корректный учет столкновений в рамках релаксационной модели в пространстве импульсов электронов при построении продольной диэлектрической функции. В то же время для поперечной диэлектрической проницаемости корректного учета влияния столкновений до сих пор проведено не было.

Целью настоящей работы является устранение указанного выше пробела.

## 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Рассмотрим уравнение Шредингера, записанное для частицы в электромагнитном поле на матрицу плотности $\rho$:

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}=H\rho-H^{*\prime}\rho. \tag{1.1}$$

Здесь $H$ – оператор Гамильтона, $H^*$ – комплексно сопряженный к $H$ оператор, $H^{*\prime}$ – комплексно сопряженный к $H$ оператор, действующий на штрихованные пространственные переменные $\mathbf{r}'$.

Оператор Гамильтона свободной частицы, находящейся в поле скалярного потенциала $U$ и в поле векторного потенциала $\mathbf{A}$, имеет вид:

$$H=\frac{(\mathbf{p}-\dfrac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m}+eU=$$
$$=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\frac{e}{2mc}(\mathbf{pA}+\mathbf{Ap})+\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2+eU. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{p}$ – оператор импульса, $\mathbf{p}=-i\hbar\nabla$, $e$ – заряд электрона, $m$ – его масса, $c$ – скорость света.

Перепишем оператор Гамильтона (1.2) в явном виде:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+\frac{ie\hbar}{2mc}\Big(2\mathbf{A}\nabla+\nabla\mathbf{A}\Big)+\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2+eU. \tag{1.3}$$

Комплексно сопряженный к $H$ оператор $H^*$ согласно (1.3) имеет вид

$$H^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle - \frac{ie\hbar}{2mc}\Big(2\mathbf{A}\nabla + \nabla\mathbf{A}\Big) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 + eU.$$

Операторы $H$ и $H^{*\prime}$, вычисленные от матрицы плотности, имеют вид:

$$H\rho = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\rho + \frac{ie\hbar}{2mc}\Big(2\mathbf{A}\nabla\rho + \rho\nabla\mathbf{A}\Big) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2\rho + eU\rho \qquad (1.4)$$

и

$$H^{*\prime}\rho = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\rho - \frac{ie\hbar}{2mc}\Big(2\mathbf{A}'\nabla'\rho + \rho\nabla'\mathbf{A}\Big) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}'^2\rho + eU'\rho. \quad (1.5)$$

Операторы $\nabla$ и $\Delta$ в (1.4) и (1.5) действуют на нештрихованные пространственные переменные матрицы плотности, т.е. $\nabla = \nabla_{\mathbf{R}}$, $\Delta = \Delta_{\mathbf{R}}$. В операторе $H^{*\prime}$ следует заменить операторы $\nabla = \nabla_{\mathbf{R}}$ и $\Delta = \Delta_{\mathbf{R}}$ на операторы $\nabla' \equiv \nabla_{\mathbf{R}'}$ и $\Delta' \equiv \Delta_{\mathbf{R}'}$, кроме того, введены обозначения

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}(\mathbf{R}', t), \qquad U' \equiv U(\mathbf{R}', t).$$

Найдем правую часть уравнения (1.1), т.е. разность соотношений (1.4) и (1.5): $H\rho - H^{*\prime}\rho$. Согласно равенствам (1.4) и (1.5) имеем:

$$\begin{aligned} H\rho - H^{*\prime}\rho = -\frac{\hbar}{2m}\Big(\Delta\rho - \Delta'\rho\Big) + \\ + \frac{ie\hbar}{2mc}\Big[2\Big(\mathbf{A}\nabla\rho + \mathbf{A}'\nabla'\rho\Big) + \rho\Big(\nabla\mathbf{A} + \nabla'\mathbf{A}\Big)\Big] + \\ + \frac{e^2}{2mc^2}\Big[\mathbf{A}^2(\mathbf{R}, t) - \mathbf{A}^2(\mathbf{R}', t)\Big] + e[U(\mathbf{R}, t) - U(\mathbf{R}', t)]\rho. \end{aligned}$$

Связь между матрицей плотности $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ и функцией Вигнера [20–22] $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ дается обратным и прямым преобразованиями Фурье

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int \rho(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}, t)e^{-i\mathbf{pa}/\hbar}d^3a,$$

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int f(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}'}{2}, \mathbf{p}, t)e^{i\mathbf{p}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')/\hbar}d^3p.$$

Функция Вигнера является аналогом функции распределения для квантовых систем. Она широко используется в самых разнообразных вопросах физики. Функция Вигнера изучалась, например, в работах [23;24].

Подставляя представление матрицы плотности через функцию Вигнера в уравнение Шредингера на матрицу плотности (1.1), получаем

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = H\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int f(\frac{\mathbf{R}+\mathbf{R}'}{2},\mathbf{p}',t)e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{R}-\mathbf{R}')/\hbar}\,d^3p'\right\} -$$

$$-H^{*\prime}\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int f(\frac{\mathbf{R}+\mathbf{R}'}{2},\mathbf{p}',t)e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{R}-\mathbf{R}')/\hbar}\,d^3p'\right\}.$$

Воспользуемся приведенными выше равенствами. При этом правую часть предыдущего уравнения представим в явном виде и в результате получаем следующее уравнение:

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\Big\{-\frac{i\hbar}{m}\mathbf{p}'\nabla f + \frac{ie\hbar}{2mc}\Big[\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{R},t)+\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{R}',t)\Big]f+$$
$$+\frac{ie\hbar}{2mc}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{R},t)+\mathbf{A}(\mathbf{R}',t)\Big]\nabla f - \frac{e}{mc}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{R},t)-\mathbf{A}(\mathbf{R}',t)\Big]\mathbf{p}'f+$$
$$+\frac{e^2}{2mc^2}\big[\mathbf{A}^2(\mathbf{R},t)-\mathbf{A}^2(\mathbf{R}',t)\big]f+$$
$$+e\big[U(\mathbf{R},t)-U(\mathbf{R}',t)\big]f\Big\}e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{R}-\mathbf{R}')/\hbar}d^3p'. \tag{1.6}$$

В уравнении (1.6) положим

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},\qquad \mathbf{R}'=\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2}.$$

Тогда в этом уравнении

$$f\Big(\frac{\mathbf{R}+\mathbf{R}'}{2},\mathbf{p}',t\Big)e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{R}-\mathbf{R}')/\hbar} = f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)e^{i\mathbf{p}'\,\mathbf{a}/\hbar}.$$

Умножим уравнение (1.6) на $e^{-i\mathbf{pa}/\hbar}$ и проинтегрируем по $\mathbf{a}$. Затем поделим обе части уравнения на $i\hbar$. В результате получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iint\Big\{-\frac{\mathbf{p}'}{m}\nabla f + \frac{e}{2mc}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)+\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]\nabla f+$$

$$+\frac{ie}{mc\hbar}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]\mathbf{p}'f+$$

$$+\frac{e}{2mc}\Big[\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)+\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f-$$

$$-\frac{ie^2}{2mc^2\hbar}\Big[\mathbf{A}^2(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}^2(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f-$$

$$-\frac{ie}{\hbar}\Big[U(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-U(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f\Bigg\}e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (1.7)$$

В левой части уравнения (1.7) стоит $f=f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, под интегралом стоит $f=f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)$.

Рассмотрим интеграл

$$\iint\mathbf{p}'(\nabla f)e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}=\nabla\iint\mathbf{p}'fe^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}=$$

$$=\nabla\int\mathbf{p}'f\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})d\,\mathbf{p}'=\mathbf{p}\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p},t).$$

Аналогично проверяются еще два равенства:

$$\iint\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)(\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t))e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}=$$

$$=\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p},t),$$

и

$$\iint\frac{e}{mc}(\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}=$$

$$=\frac{e}{mc}(\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))f(\mathbf{r},\mathbf{p},t).$$

Тогда уравнение (1.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{m}\Big(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big)\nabla f-\frac{e}{mc}(\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=W[f]. \qquad (1.8)$$

В уравнении (1.8) символ $W[f]$ – интеграл (функционал) Вигнера — Власова, определяемый равенством

$$W[f]=\iint\Big\{\frac{e}{2mc}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)+\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)-2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big]\nabla f+$$

$$+\frac{ie}{mc\hbar}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]\mathbf{p}'f+$$

$$+\frac{e}{2mc}\Big[\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)+\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)-2\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big]f-$$

$$-\frac{ie^2}{2mc^2\hbar}\Big[\mathbf{A}^2(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}^2(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f-$$

$$-\frac{ie}{\hbar}\Big[U(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-U(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f\Big\}e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (1.9)$$

Энергия частицы равна

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{1}{2m}\Big(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big)^2+eU(\mathbf{r},t).$$

Тогда скорость частицы $\mathbf{v}$ равна

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{p}}=\frac{1}{m}\Big(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big),$$

кроме того,

$$\nabla\mathbf{v}=-\frac{e}{mc}\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Следовательно, левая часть уравнения (1.9) равна:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{m}\Big(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big)\nabla f-f\frac{e}{mc}\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f+f\nabla\mathbf{A}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}f).$$

Поэтому уравнение (1.9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}f)=W[f]. \qquad (1.10)$$

В случае столкновительной плазмы кинетическое уравнение (1.10) можно записать как

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}f)=B[f,f]+W[f]. \qquad (1.11)$$

В уравнении (1.11) символ $B[f,f]$ означает интеграл столкновений.

Мы будем рассматривать при рассеянии электронов на примесях уравнение (1.11) с интегралом столкновений в форме релаксационной $\tau$–модели [11;12]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}f) = \frac{f^{(0)} - f}{\tau} + W[f]. \tag{1.12}$$

В уравнении (1.12) $\tau$ – среднее время между двумя последовательными столкновениями, $\tau = 1/\nu$, $\nu$ – эффективная частота столкновений, $f^{(0)}$ — локально равновесное распределение Ферми — Дирака,

$$f^{(0)} = \Big[1 + \exp\Big(\frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T}\Big)\Big]^{-1}.$$

Здесь $k_B$ – постоянная Больцмана, $T$ – температура плазмы, $\mu$ – химический потенциал электронного газа.

В явном виде локально равновесная функция распределения записывается в виде:

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \left\{1 + \exp\Big[\frac{\big[\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\big]^2}{2mk_B T} + \frac{eU(\mathbf{r}, t) - \mu}{k_B T}\Big]\right\}^{-1}.$$

Введем безразмерные скорость электронов $\mathbf{C}(\mathbf{r}, t)$, скалярный потенциал $\phi(\mathbf{r}, t)$ и химический потенциал $\alpha$:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{v_T} = \frac{1}{p_T}\Big[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\Big],$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{eU(\mathbf{r}, t)}{k_B T}, \qquad \alpha = \frac{\mu}{k_B T},$$

где $v_T = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ – тепловая скорость электронов, $\beta = \dfrac{m}{2k_B T}$.

Теперь локально равновесная функция может быть представлена через скорость электронов как

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \Big[1 + \exp\Big(\frac{mv^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{2k_B T} + \frac{eU(\mathbf{r}, t) - \mu}{k_B T}\Big)\Big]^{-1},$$

или, в безразмерных параметрах,

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{1 + \exp\big[C^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \phi(\mathbf{r}, t) - \alpha\big]}. \tag{1.13}$$

Обозначим $\chi = \alpha - \phi$. Тогда

$$f^{(0)} = \frac{1}{1 + e^{C^2 - \chi}}.$$

Величина $\chi$ определяется из закона сохранения числа частиц

$$\int f d\Omega_F = \int f^{(0)} d\Omega_F.$$

Здесь $d\Omega_F$ – квантовая мера для электронов,

$$d\Omega_F = \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Отметим, что в случае постоянных потенциалов $U = \text{const}\,, \mathbf{A} = \text{const}$ равновесная функция распределения (1.13) является решением уравнения (1.12).

Найдем концентрацию электронов (числовую плотность) $N$ и среднюю скорость электронов $\mathbf{u}$ в равновесном состоянии. Эти макропараметры определяются следующим образом:

$$N(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\Omega_F,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\Omega_F.$$

Для вычисления этих макропараметров в равновесном состоянии следует положить $f = f^{(0)}$, где $f^{(0)}$ определяется равенством (1.13). Обозначать эти макропараметры в равновесном состоянии будем через $N^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$.

Осуществим замену переменной интегрирования $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}'$ в предыдущих равенствах. Затем, переходя к интегрированию в сферических координатах, для числовой плотности в равновесном состоянии получаем:

$$N^{(0)} = \frac{m^3 v_T^3}{\pi^2 \hbar^3} f_2(\alpha - \phi), \tag{1.14}$$

где

$$f_2(\alpha - \phi) = \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1 + \exp(x^2 + \phi - \alpha)} = \int\limits_0^\infty x^2 f_F(\alpha - \phi)\,dx.$$

Точно так же, как для числовой плотности, для средней скорости в равновесном состоянии получаем:

$$\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{N^{(0)}} \int \mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) d\Omega_F,$$

или, в явной форме,

$$\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{2}{N^{(0)}(2\pi\hbar)^3} \int \frac{[\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}]\, d^3p}{1 + \exp\left[\dfrac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2k_B T m} + \dfrac{eU - \mu}{k_T m}\right]}.$$

После той же замены переменных $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}'$ получаем:

$$\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{2}{N^{(0)}(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\mathbf{p}'\, d^3p'}{1 + \exp\left[\dfrac{p'^2}{2k_B T m} + \dfrac{eU - \mu}{k_T m}\right]} = 0. \quad (1.15)$$

Итак, скорость электронов в равновесном состоянии согласно (1.15) равна нулю.

Заметим, что числовая плотность электронов и их средняя скорость удовлетворяют обычному уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{div}(N\mathbf{u}) = 0. \quad (1.16)$$

Для вывода уравнения непрерывности (1.16) нужно проинтегрировать кинетическое уравнение (1.12) по квантовой мере для электронов $d\Omega_F$ и использовать определение числовой плотности и средней скорости. Затем следует воспользоваться законом сохранения числа частиц и проверить, что интеграл по квантовой мере $d\Omega_F$ от интеграла Вигнера — Власова равен нулю. В самом деле, имеем:

$$\int W[f] \frac{2\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = 2 \int\int \Big\{ \cdots \Big\} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{a}/\hbar} \delta(\mathbf{a})\, d^3a\, d^3p' =$$

$$= 2 \int \Big\{ \cdots \Big\}\Big|_{\mathbf{a}=0} d^3p' \equiv 0,$$

ибо, как нетрудно проверить простой подстановкой,

$$\Big\{ \cdots \Big\}\Big|_{\mathbf{a}=0} \equiv 0.$$

Здесь символ $\{\cdots\}$ означает то же самое выражение, что и в правой части соотношения (1.9).

Заметим, что левая часть кинетического уравнения (1.11) или (1.12) приобретает стандартный для теории переноса вид при следующем условии калибровки:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=0. \tag{1.17}$$

При этом, т.е. в случае калибровки (1.17), кинетическое уравнение (1.11) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f=B[f,f]+W[f], \tag{1.18}$$

в котором интеграл Вигнера — Власова равен:

$$W[f]=\iint\Big\{\frac{e}{2mc}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)+\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)-2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big]\nabla f+$$

$$+\frac{ie}{mc\hbar}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]\mathbf{p}'f-$$

$$-\frac{ie^2}{2mc^2\hbar}\Big[\mathbf{A}^2(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}^2(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f-$$

$$-\frac{ie}{\hbar}\Big[U(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-U(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]f\Big\}e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{1.19}$$

## 2. ЛИНЕРАЛИЗАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Будем рассматривать кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме $\tau$–модели и считать, что скалярный потенциал равен нулю: $U(\mathbf{r},t)\equiv 0$.

Векторный потенциал возьмем ортогональным направлению волнового вектора $\mathbf{k}:\mathbf{kA}=0$ в виде бегущей гармонической волны:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{A}_0e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.$$

Будем считать поле векторного потенциала достаточно малым. Это предположение позволяет линеаризовать уравнение и пренебречь квадратичными по полю слагаемыми.

Тогда уравнение (1.18) упрощается:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f=\frac{f^{(0)}-f}{\tau}+W[f]. \tag{2.1}$$

В уравнении (2.1) локально равновесное распределение Ферми — Дирака упрощается:

$$f^{(0)}=f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\Big[1+\exp\Big(C^2(\mathbf{r},\mathbf{p},t)-\alpha\Big)\Big]^{-1}. \tag{2.2}$$

Интеграл Вигнера — Власова (1.19) также существенно упрощается и имеет следующий вид:

$$W[f]=\frac{ie}{mc\hbar}\iint\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)\Big]\mathbf{p}'\times$$

$$\times f e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}}{2},t)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{a}}{2},t)=\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big[e^{i\mathbf{ka}/2}-e^{-i\mathbf{ka}/2}\Big].$$

Вычисляя интеграл в (2.3), находим, что

$$W[f]=\frac{ie}{mc\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\iint\Big[e^{i\mathbf{ka}/2}-e^{-i\mathbf{ka}/2}\Big]e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{a}/\hbar}\frac{d^3a\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Внутренний интеграл равен:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\Big\{\exp\Big(i\Big[\mathbf{p}'-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}\hbar}{2}\Big]\frac{\mathbf{a}}{\hbar}\Big)-\exp\Big(i\Big[\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}\hbar}{2}\Big]\frac{\mathbf{a}}{\hbar}\Big)\Big\}d^3a=$$

$$=\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2})-\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}).$$

Вычисляем интеграл Вигнера — Власова:

$$W[f]=$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\frac{ie}{mc\hbar}\int\Big[\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2})-\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2})\Big]\mathbf{p}'f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)\,d^3p' =$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\frac{ie}{mc\hbar}\Big[\Big(\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\Big)f(\mathbf{r},\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)-\Big(\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\Big)f(\mathbf{r},\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)\Big] =$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\frac{ie}{mc\hbar}\Big\{\mathbf{p}\Big[f(\mathbf{r},\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)-f(\mathbf{r},\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)\Big]-$$

$$-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\Big[f(\mathbf{r},\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)+f(\mathbf{r},\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t)\Big]\Big\} =$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\frac{ie}{mc\hbar}\mathbf{p}\Big(f_+-f_-\Big),$$

где

$$f_\pm \equiv f(\mathbf{r},\mathbf{p}\mp\frac{\hbar\mathbf{k}}{2},t).$$

Следовательно, интеграл Вигнера — Власова равен:

$$W[f] = \frac{ie}{mc\hbar}\mathbf{p}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big[f_+-f_-\Big] = \frac{iep_T}{mc\hbar}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big[f_+-f_-\Big] =$$

$$= \frac{iev_T}{c\hbar}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big[f_+-f_-\Big]. \qquad (2.4)$$

Здесь и ниже выражение $\mathbf{PA}$ означает скалярное произведение.

Далее удобнее использовать безразмерную скорость $\mathbf{C}$ в виде:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{v}}{v_T} = \frac{\mathbf{p}}{p_T} - \frac{e}{cp_T}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{P} - \frac{e}{cp_T}\mathbf{A}(\mathbf{r},t),$$

где $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{p}}{p_T}$ – безразмерный импульс.

В линейном приближении функцию $f$ в интеграле Вигнера — Власова можно заменить на абсолютный фермиан, т.е. положить $f = f_F(P)$, где

$$f_F(P) = \frac{1}{1+\exp(P^2-\alpha)}, \qquad \alpha = \text{const} .$$

При этом интеграл Вигнера — Власова (2.4) будет иметь вид:

$$W[f_F] = \frac{iev_T}{c\hbar}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big[f_F^+-f_F^-\Big],$$

где

$$f_F^{\pm} \equiv f_F^{\pm}(\mathbf{P}) = \frac{1}{1+\exp\left[\left(\mathbf{P} \mp \dfrac{\hbar\mathbf{k}}{2p_T}\right)^2 - \alpha\right]},$$

а $p_T = mv_T$ – тепловой импульс электронов, или,

$$f_F^{\pm} \equiv f_F(P_{\pm}) = \frac{1}{1+e^{P_{\pm}^2-\alpha}}.$$

Здесь

$$P_{\pm}^2 = \left(\mathbf{P} \mp \frac{\hbar\mathbf{k}}{2p_T}\right)^2 = \left(P_x \mp \frac{\hbar k_x}{2p_T}\right)^2 + \left(P_y \mp \frac{\hbar k_y}{2p_T}\right)^2 + \left(P_z \mp \frac{\hbar k_z}{2p_T}\right)^2,$$

или

$$P_{\pm}^2 = \frac{\left(p_x \mp \dfrac{\hbar k_x}{2}\right)^2 + \left(p_y \mp \dfrac{\hbar k_y}{2}\right)^2 + \left(p_z \mp \dfrac{\hbar k_z}{2}\right)^2}{p_T^2}.$$

Линеаризацию равновесного распределения Ферми — Дирака (2.2) проведем относительно векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$:

$$f^{(0)} = f^{(0)}\Big|_{\mathbf{A}=0} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{A}}\Bigg|_{\mathbf{A}=0}\mathbf{A}(\mathbf{r},t),$$

или, в явном виде:

$$f^{(0)} = f_F(P) + g(P)\frac{2e}{cp_T}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \tag{2.5}$$

где

$$g(P) = \frac{e^{P^2-\alpha}}{(1+e^{P^2-\alpha})^2}.$$

Учитывая разложение (2.5), ищем функцию Вигнера в виде:

$$f = f_F(P) + g(P)\frac{2e}{cp_T}\big[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\big] + g(P)[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]h(\mathbf{P}) =$$

$$= f_F(P) + g(P)[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]\Big[\frac{2e}{cp_T} + h(\mathbf{P})\Big]. \tag{2.6}$$

Получаем следующее уравнение:

$$-i\omega g(P)\big[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\big]\Big(\frac{2e}{cp_T}+h(\mathbf{P})\Big) + i\mathbf{k}\mathbf{v}g(P)\big[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\big]\Big(\frac{2e}{cp_T}+h(\mathbf{P})\Big) +$$

$$+\nu g(P)\big[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)\big]h(P)=\frac{iev_T}{c\hbar}\big[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)\big](f_F^+-f_F^-),$$

или

$$[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)]\ g(P)(\nu-i\omega+i\mathbf{kv})h(\mathbf{P})=$$

$$=\frac{iev_T}{c\hbar}[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)](f_F^+-f_F^-)+[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)]\frac{2ie}{cp_T}g(P)(\omega-v_T\mathbf{kP}).$$

Из этого уравнения находим:

$$\big[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)\big]g(P)h(\mathbf{P})=\big[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)\big]\left[\frac{2ie}{cp_T}\frac{\omega-v_T\mathbf{kP}}{\nu-i\omega+iv_T\mathbf{kP}}g(P)+\right.$$

$$\left.+\frac{iev_T}{c\hbar}\frac{f_F^+-f_F^-}{\nu-i\omega+iv_T\mathbf{kP}}\right]. \qquad (2.7)$$

С помощью (2.6) и (2.7) построим полную функцию распределения:

$$f=f^{(0)}+g(P)(\mathbf{PA})h(\mathbf{P})=$$

$$=f^{(0)}+(\mathbf{PA})\left[\frac{2ie}{cp_T}\frac{\omega-v_T\mathbf{kP}}{\nu-i\omega+iv_T\mathbf{kP}}g(P)+\frac{iev_T}{c\hbar}\frac{f_F^+-f_F^-}{\nu-i\omega+iv_T\mathbf{kP}}\right],$$

или

$$f=f^{(0)}+(\mathbf{PA})\left[\frac{2ie}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)+\frac{iel}{c\hbar}\frac{f_F^+-f_F^-}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\right]. \qquad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}l$, $l$ – средняя длина свободного пробега электронов, $l=v_T\tau$, $\mathbf{k}_1$ – безразмерный волновой вектор.

Рассмотрим связь поля и потенциалов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\frac{\partial U(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}},$$

или

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{i\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Следовательно, ток связан с векторным потенциалом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\sigma_{tr}\frac{i\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

По определению, ток равен:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=e\int\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)f\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Заметим, что ток в равновесном состоянии (калибровочный ток) равен нулю:

$$\mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r},t)=e\int\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)f^{(0)}\frac{2p_T^3\,d^3P}{(2\pi\hbar)^3}=0.$$

В самом деле, учитывая, что средняя скорость электронов в равновесном состоянии равна нулю, согласно (1.15) имеем:

$$\mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r},t)=eN^{(0)}\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r},t)\equiv 0.$$

Следовательно, с использованием равенства (2.8) для тока имеем равенство:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ep_T^3}{(2\pi\hbar)^3}\int\big(\mathbf{AP}\big)\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Bigg[\frac{2ie}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\,g(P)+$$

$$+\frac{iel}{c\hbar}\frac{f_F^+-f_F^-}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\Bigg]d^3P.$$

Подставляя в это равенство явное выражение для скорости

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{P},t)=\frac{\mathbf{p}}{m}-\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{mc}=\frac{p_T\mathbf{P}}{m}-\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{mc},$$

и, линеаризуя его по векторному полю, получаем:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ie^2p_T^4}{(2\pi\hbar)^3m}\int\big[\mathbf{PA}(\mathbf{r},t)\big]\mathbf{P}\Bigg[\frac{2}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)+$$

$$+\frac{l}{c\hbar}\frac{f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\Bigg]d^3P. \qquad (2.9)$$

Заметим, что

$$\Big(\mathbf{P}\mp\frac{\hbar\mathbf{k}}{2p_T}\Big)^2=P^2\mp\frac{\hbar}{p_T}\mathbf{P}\mathbf{k}+\Big(\frac{\hbar}{2p_T}\Big)^2k^2=$$

$$=P^2\mp\frac{\hbar\nu}{2\mathcal{E}_T}\mathbf{P}\mathbf{k}_1+\Big(\frac{\hbar\nu}{4\mathcal{E}_T}\Big)^2k_1^2.$$

Перепишем это выражение в виде:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ie^2p_T^4}{(2\pi\hbar)^3m}\int\big[\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\big]\mathbf{P}S(P^2,\mathbf{P}\mathbf{k}_1)\,d^3P, \qquad (2.10)$$

где

$$S(P^2,\mathbf{P}\mathbf{k}_1)=\frac{2}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)+\frac{l}{c\hbar}\frac{f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}.$$

Возьмем единичный вектор $\mathbf{e}_1=\dfrac{\mathbf{A}}{A}$, направленный вдоль вектора $\mathbf{A}$. Тогда равенство (2.10) можно записать в виде:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ie^2p_T^4A(\mathbf{r},t)}{(2\pi\hbar)^3m}\int\big(\mathbf{P}\mathbf{e}_1\big)\mathbf{P}S(P^2,\mathbf{P}\mathbf{k}_1)\,d^3P, \qquad (2.11)$$

В силу симметрии значение интеграла (2.11) не изменится, если вектор $\mathbf{e}_1$ заменить на любой другой единичный вектор $\mathbf{e}_2$, перпендикулярный вектору $\mathbf{k}_1$, т.е.

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{k}_1}{|\mathbf{A}\times\mathbf{k}_1|}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{k}_1}{Ak_1},$$

причем $\mathbf{A}\times\mathbf{k}_1$ есть векторное произведение.

Разложим вектор $\mathbf{P}$ по трем ортогональным направлениям $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{k}_1}{k_1}$:

$$\mathbf{P}=(\mathbf{P}\mathbf{n})\mathbf{n}+(\mathbf{P}\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{P}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2.$$

С помощью этого разложения получаем:

$$(\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{P}=A(\mathbf{P}\mathbf{e}_1)\mathbf{P}=$$

$$=A(\mathbf{P}\mathbf{e}_1)(\mathbf{P}\mathbf{n})\mathbf{n}+A(\mathbf{P}\mathbf{e}_1)^2\mathbf{e}_1+A(\mathbf{P}\mathbf{e}_1)(\mathbf{P}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2.$$

Подставляя это разложение в (2.11), и, учитывая, что интегралы от нечетных функций по симметричному промежутку равны нулю, получаем:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ie^2p_T^4\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{(2\pi\hbar)^3m}\int(\mathbf{Pe}_1)^2S(P^2,\mathbf{Pn})\,d^3P. \tag{2.12}$$

Ввиду симметрии значение интеграла не изменится, если вектор $\mathbf{e}_1$ заменить на любой другой единичный вектор $\mathbf{e}_2$, перпендикулярный вектору $\mathbf{k}_1$. Поэтому

$$\int\Big(\mathbf{e}_1\mathbf{P}\Big)^2[\cdots]d^3P=\int\Big(\mathbf{e}_2\mathbf{P}\Big)^2[\cdots]d^3P=$$

$$=\frac{1}{2}\int\Big[\Big(\mathbf{e}_1\mathbf{P}\Big)^2+\Big(\mathbf{e}_2\mathbf{P}\Big)^2\Big][\cdots]d^3P.$$

Заметим, что квадрат длины вектора $\mathbf{P}$ равен:

$$P^2=(\mathbf{Pe}_1)^2+(\mathbf{Pe}_2)^2+(\mathbf{Pn})^2,$$

откуда

$$\Big(\mathbf{e}_1\mathbf{P}\Big)^2+\Big(\mathbf{e}_2\mathbf{P}\Big)^2=P^2-\frac{(\mathbf{Pk}_1)^2}{k_1^2}=P^2-(\mathbf{Pn})^2=P_\perp^2,$$

где $P_\perp$ – проекция вектора $\mathbf{P}$ на прямую, перпендикулярную плоскости $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$.

Отсюда для плотности тока получаем следующее выражение

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2p_T^4\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{(2\pi\hbar)^3m}\int\Bigg[\frac{2}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)+$$

$$+\frac{l}{c\hbar}\frac{f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\Bigg]P_\perp^2d^3P.$$

Заменяя ток в левой части этого равенства выражением через поле, получаем:

$$\sigma_{tr}\frac{i\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{ep_T^4\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{(2\pi\hbar)^3m}\int\Bigg[\frac{2ie}{cp_T}\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)+$$

$$+\frac{iel}{c\hbar}\frac{f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}\Bigg]P_\perp^2d^3P.$$

## 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Из последней формулы получаем выражение поперечной диэлектрической проницаемости в квантовой плазме:

$$\sigma_{tr} = \frac{e^2 p_T^4}{(2\pi\hbar)^3 m\omega} \int \left[ \frac{2}{p_T} \frac{\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}} g(P) + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{\hbar} \frac{f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P})}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}} \right] P_\perp^2 d^3P. \qquad (3.1)$$

Преобразуем выражение для поперечной проводимости и приведем его к виду:

$$\sigma_{tr} = \frac{2e^2 p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 m\omega} \int \left[ (\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P}) g(P) + \frac{\mathcal{E}_T}{\hbar\nu} (f_F^+ - f_F^-) \right] \frac{P_\perp^2 \, d^3P}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}},$$

где $\mathcal{E}_T$ – тепловая энергия электронов,

$$\mathcal{E}_T = \frac{mv_T^2}{2}.$$

С использованием равенства (1.14) предыдущую формулу представим в виде:

$$\sigma_{tr} = \frac{\sigma_0}{4\pi f_2(\alpha)} \int \left\{ \left[ 1 - \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{\omega\tau} \right] g(P) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathcal{E}_T}{\hbar\omega} \left[ f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P}) \right] \right\} \frac{P_\perp^2 \, d^3P}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}. \qquad (3.1')$$

Здесь функция $f_2(\alpha)$ была введена выше и в отсутствии скалярного потенциала определяется равенством:

$$f_2(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^2 f_F(x) dx = \int\limits_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{1 + e^{x^2 - \alpha}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - x^2}) dx.$$

Величина $\sigma_0$ определяется классическим выражением стандартной проводимости:

$$\sigma_0 = \frac{e^2 N^{(0)}}{m\nu}.$$

Диэлектрическую проницаемость найдем по формуле:

$$\varepsilon_{tr} = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{tr}.$$

Подставляя в это равенство электрическую проводимость $(3.1')$, получаем выражение для диэлектрической проницаемости в квантовой столкновительной плазме:

$$\varepsilon_{tr} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{i}{4\pi f_2(\alpha)}\int\Bigg\{\Big[\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P}\Big]g(P)+$$

$$+\frac{\mathcal{E}_T}{\hbar\nu}\Big[f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P})\Big]\Bigg\}\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}.$$

Исследуем различные частные случаи электропроводимости. В длинноволновом пределе (когда $k \to 0$) из $(3.1')$ получаем известное классическое выражение:

$$\sigma_{tr}(k=0) = \sigma_0\frac{\nu}{\nu - i\omega} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}.$$

Рассмотрим квантовомеханический предел проводимости в случае произвольных значений волнового числа, т.е. предел проводимости в случае, когда постоянная Планка $\hbar \to 0$, а величина $k$ – произвольная.

При малых $\hbar$ имеем:

$$f_0^{\pm}(\mathbf{P}) = f_F(P) \pm g(P)2P_x\frac{\hbar k}{2mv_T},$$

откуда

$$f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P}) = 2g(P)2P_x\frac{\hbar k}{2mv_T}.$$

Следовательно,

$$(\omega - \mathbf{k}v_T\mathbf{P})g(P) + \frac{p_T^2}{2m\hbar}\big[f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P})\big] = \omega g(P).$$

Таким образом, в линейном приближении при малых $\hbar$ (независимо от величины $k$) для поперечной проводимости получаем:

$$\sigma_{tr} = \sigma_{tr}^{\text{classic}},$$

где
$$\sigma_{tr}^{\text{classic}}=\frac{\sigma_0}{4\pi f_2(\alpha)}\int\frac{g(P)P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}. \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) в точности совпадает с выражением поперечной проводимости для классической плазмы с произвольной температурой.

Вернемся к выражению (3.1$'$). Представим его в виде суммы двух слагаемых:
$$\sigma_{tr}=\sigma_{tr}^{\text{classic}}+\sigma_{tr}^{\text{quant}}, \tag{3.3}$$
где $\sigma^{\text{classic}}$ определяется равенством (3.2), а второе слагаемое $\sigma_{tr}^{\text{quant}}$ отвечает квантовым свойствам рассматриваемой плазмы,
$$\sigma_{tr}^{\text{quant}}=\frac{\sigma_0}{4\pi f_2(\alpha)}\int\Bigg[-\frac{\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{\omega\tau}g(P)+$$
$$+\frac{\mathcal{E}_T}{\hbar\omega}[f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})]\Bigg]\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}. \tag{3.4}$$

Квантовое слагаемое $\sigma_{tr}^{\text{quant}}$ представим в виде, пропорциональном квадрату постоянной Планка $\hbar$. Для этого кубическое разложение $\sigma_{tr}^{\text{quant}}$ по степеням $\hbar$. Ось $x$ направим вдоль вектора $\mathbf{k}_1$. Напомним, что в линейном по $\hbar$ приближении, как уже указывалось, величина $\sigma_{tr}^{\text{quant}}$ исчезает. Разложим распределение Ферми — Дирака по степеням $q=\dfrac{k}{k_T}=\dfrac{k_1\hbar\nu}{mv_T^2}$, где $k_T=\dfrac{p_T}{\hbar}$ – тепловое волновое число. Имеем:
$$f_F^\pm(\mathbf{P})=f_F(P)\pm g(P)P_xq-\Big[g'_{P^2}(P)P_x^2+\frac{1}{2}g(P)\Big]\frac{q^2}{2}\pm$$
$$\pm\Big[g''_{P^2P^2}(P)P_x^2+\frac{3}{2}g'_{P^2}(P)\Big]P_x\frac{q^3}{6}+\cdots.$$

Здесь
$$g'_{P^2}(P)=g(P)\frac{1-e^{P^2-\alpha}}{1+e^{P^2-\alpha}},$$
$$g''_{P^2P^2}(P)=g(P)\Big[\Big(\frac{1-e^{P^2-\alpha}}{1+e^{P^2-\alpha}}\Big)^2-2g(P)\Big].$$

Теперь легко найти разность:

$$f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P}) =$$

$$+2g(P)P_xq + \Big[g''_{P^2P^2}(P)P_x^2 + \frac{3}{2}g'_{P^2}(P)\Big]P_x\frac{q^3}{3} + \cdots .$$

С помощью этого выражения находим, что

$$-\frac{k_1P_x}{\omega\tau}g(P) + \frac{\mathcal{E}_T}{\hbar\omega}[f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P})] = G(\mathbf{P})\frac{k_1^3\hbar^2\nu^3}{6\omega m^2v_T^4} + \cdots ,$$

где

$$G(\mathbf{P}) = P_x\Big[g''_{P^2P^2}(P)P_x^2 + \frac{3}{2}g'_{P^2}(P)\Big].$$

Подставляя это выражение в (3.4), получаем, что квантовое слагаемое пропорционально квадрату постоянной Планка $\hbar$ и определяется выражением:

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}} \approx \sigma_0\frac{k_1^3\hbar^2\nu^3}{24\pi\omega m^2v_T^4f_2(\alpha)}\int\frac{G(\mathbf{P})(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}. \tag{3.5}$$

В выражениях для классической и квантовой составляющих проводимости можно несколько упростить интегралы.

В выражении (3.3) для классической составляющей тройной интеграл разобьем на внешнее одномерное интегрирование по переменной $P_x$ от $-\infty$ до $+\infty$ и внутреннее двойное интегрирование по плоскости, ортогональной оси $P_x$. Внутреннее интегрирование проведем в полярных координатах. При этом мы полагаем, что

$$P^2 = P_x + P_\perp^2, \qquad d^3P = dP_x\,d\mathbf{P}_\perp, \qquad d\mathbf{P}_\perp = P_\perp\,dP_\perp d\chi,$$

где $P_\perp$ – полярный радиус, а $\chi$ – полярный угол.

При этом мы получаем, что

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \frac{\sigma_0}{4\pi f_2(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dP_x\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g(P)\,P_\perp^3dP_\perp d\chi}{1-i\omega\tau+ik_1P_x},$$

где

$$g(P) = \frac{e^{P_x^2+P_\perp-\alpha}}{(1+e^{P_x^2+P_\perp-\alpha})^2}.$$

Внутренний двойной интеграл вычислим в полярных координатах:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} g(P)\, P_\perp^3 dP_\perp d\chi = \pi \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}). \tag{3.6}$$

Следовательно, выражение для классической составляющей упрощается до одномерного интеграла:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \frac{\sigma_0}{4f_2(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{1 - i\omega\tau + ik_1 P_x}. \tag{3.7}$$

Квантовое слагаемое (3.4) представим в виде суммы двух:

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}} = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0 k_1}{4\pi f_2(\alpha)\omega\tau} \int \frac{P_x(P^2 - P_x^2) g(P)\, d^3P}{1 - i\omega\tau + ik_1 P_x},$$

и

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0 \mathcal{E}_T}{4\pi f_2(\alpha)\hbar\omega} \int \frac{f_F^+(\mathbf{P}) - f_F^-(\mathbf{P})}{1 - i\omega\tau + ik_1 P_x} (P^2 - P_x^2) d^3P. \tag{3.9}$$

С помощью равенства (3.6) выражение для $\sigma_1$ может быть переписано в виде:

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0 k_1}{4f_2(\alpha)\omega\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_x \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{1 - i\omega\tau + ik_1 P_x}. \tag{3.10}$$

После замены переменной

$$P_x \mp \frac{\hbar k}{2p_T} \equiv P_x \mp \frac{k_1 \hbar\nu}{2mv_T^2} \equiv P_x \mp \frac{k_1 \hbar\nu}{4\mathcal{E}_T} \to P_x$$

разность интегралов из (3.9) преобразуется к одному интегралу и мы получаем:

$$\sigma_2 = -\frac{i\sigma_0 k_1^2}{8\pi f_2(\alpha)\omega\tau} \int \frac{f_F(P)(P^2 - P_x^2)\, d^3P}{(1 - i\omega\tau + ik_1 P_x)^2 + (k_1^2 \hbar\nu / 4\mathcal{E}_T)^2}. \tag{3.11}$$

Поступая точно так же, как и при выводе формулы (3.6), двойной внутренний интеграл в (3.11) сведем к одномерному:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_F(P)[P^2-P_x^2]\,d\mathbf{P}_\perp = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} f_F(P)P_\perp^3\,dP_\perp d\chi =$$

$$= 2\pi\int\limits_{0}^{\infty} P_\perp \ln(1+e^{\alpha-P_x^2-P_\perp^2})\,dP_\perp.$$

Теперь выражение (3.11) можно записать в виде (заменяя переменную интегрирования $P_\perp=\rho$):

$$\sigma_2 = -\frac{i\sigma_0 k_1^2}{4f_2(\alpha)\omega\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\rho\ln(1+e^{\alpha-\rho^2-P_x^2})d\rho\,dP_x}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+(k_1^2\hbar\nu/4\mathcal{E}_T)^2}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, выражение для поперечной проводимости можно представить в виде суммы одномерного (3.11) и двумерного (3.12) интегралов:

$$\sigma_{tr} = \frac{\sigma_0}{4f_2(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[1-(k_1/\omega\tau)P_x]\ln(1+e^{\alpha-P_x^2})dP_x}{1-i\omega\tau+ik_1P_x} -$$

$$-\frac{i\sigma_0 k_1^2}{4f_2(\alpha)\omega\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\rho\ln(1+e^{\alpha-\rho^2-P_x^2})d\rho\,dP_x}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+(k_1^2\hbar\nu/4\mathcal{E}_T)^2}.$$

Дадим еще одну форму поперечной проводимости. Сначала разберемся с квантовым слагаемым.

В выражении (3.11) для $\sigma_2$ тройной интеграл можно свести к одномерному интегралу. Для этого в (3.11) перейдем к интегрированию в сферических координатах и представим это выражение в виде:

$$\sigma_2 = -\frac{i\sigma_0 k_1^2}{4f_2(\alpha)\omega\tau}\int\limits_{0}^{\infty} f_F(P)P^4 J(P)\,dP,$$

где

$$J(P) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-\mu^2)\,d\mu}{(1-i\omega\tau+ik_1P\mu)^2+(k_1^2\hbar\nu/4\mathcal{E}_T)^2}.$$

Обозначим временно

$$a = 1 - i\omega\tau, \qquad b = ik_1P, \qquad d = \frac{\hbar\nu k_1^2}{4\mathcal{E}_T},$$

и перепишем интеграл $J(P)$ в виде:

$$J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-\mu^2)d\mu}{(a+b\mu)^2+d^2}.$$

После замены переменной $a + b\mu = t$ перепишется в виде:

$$J = \frac{1}{b^3}\int\limits_{a-b}^{a+b} \frac{b^2-(t-a)^2}{t^2+d^2}dt.$$

Этот интеграл равен:

$$J = -\frac{2}{b^2} + \frac{d^2+b^2-a^2}{b^3}\cdot\frac{1}{2id}\ln\frac{(a+b-id)(a-b+id)}{(a+b+id)(a-b-id)}+$$

$$+\frac{a}{b^3}\ln\frac{(a+b-id)(a+b+id)}{(a-b-id)(a-b+id)},$$

или

$$J = -\frac{2}{b^2} + \frac{d^2+b^2-a^2}{2idb^3}\ln\frac{a^2-(b-id)^2}{a^2-(d+id)^2} + \frac{a}{b^3}\ln\frac{(a+b)^2+d^2}{(a-d)^2+d^2}.$$

Учитывая обозначения для $a, b, d$, получаем:

$$J(P) \equiv J(P;\omega\tau,k_1) = \frac{2}{(k_1P)^2}-$$

$$-\frac{(1-i\omega\tau)^2+(k_1P)^2-(\hbar\nu k_1^2/4\mathcal{E}_T)^2}{k_1^5P^3(\hbar\nu/2\mathcal{E}_T)}\times$$

$$\times\ln\frac{(1-i\omega\tau)^2+(k_1P-\hbar\nu k_1^2/4\mathcal{E}_T)^2}{(1-i\omega\tau)^2+(k_1P+\hbar\nu k_1^2/4\mathcal{E}_T)^2}+$$

$$+i\frac{1-i\omega\tau}{(k_1P)^3}\ln\frac{(1-i\omega\tau+ik_1P)^2+(\hbar\nu k_1^2/4\mathcal{E}_T)^2}{(1-i\omega\tau-ik_1P)^2+(\hbar\nu k_1^2/4\mathcal{E}_T)^2}. \qquad (3.13)$$

Таким образом, выражение квантовой поперечной проводимости определяется одномерным интегралом:

$$\sigma_{tr}=\frac{\sigma_0}{4f_2(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-(k_1/\omega\tau)P_x}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}\ln(1+e^{\alpha-P_x^2})dP_x-$$

$$-\frac{i\sigma_0k_1^2}{4f_2(\alpha)\omega\tau}\int\limits_0^{\infty}f_F(P)P^4J(P)\,dP,$$

где функция $J(P)$ определяется выражением (3.13).

Рассмотрим отдельно случай вырожденной плазмы.

## 4. ВЫРОЖДЕННАЯ КВАНТОВАЯ ПЛАЗМА

Вернемся к формуле (3.1) для поперечной проводимости. С помощью (1.14) и определения стандартной проводимости приведем ее к виду:

$$\sigma_{tr}=\frac{2e^2m^3v_T^3}{\omega m(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}g(P)P_\perp^2\,d^3P+$$

$$+\frac{e^2m^3v_T^5}{\omega(2\pi\hbar)^3\hbar\nu}\int\frac{f_F^+(\mathbf{P})-f_F^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}P_\perp^2\,d^3P. \qquad (4.1)$$

В формуле (4.1) сначала вернемся с интегрированию по импульсам $\mathbf{p}=\mathbf{P}p_T$. Затем перейдем к новой безразмерной переменной $\mathbf{P}=\dfrac{\mathbf{p}}{p_F}$, где $p_F=mv_F$, $v_F$ – скорость электрона на поверхности Ферми, которая предполагается сферической. Получаем для $\sigma_{tr}$ следующее выражение:

$$\sigma_{rt}=\frac{e^2m^3v_F^5}{(2\pi\hbar)^3\omega k_BT}\int(\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P})g(P)\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}+$$

$$+\frac{e^2m^3v_F^5}{(2\pi\hbar)^3\omega\nu\hbar}\int\Big[f_F^+-f_F^-\Big]\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}. \qquad (4.1')$$

В этом выражении $l=v_F\tau$ – средняя длина свободного пробега электронов в вырожденной плазме, $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}l$,

$$g(P)=\frac{\exp\Big(\dfrac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_F}{k_BT}\Big)}{\Big[1+\exp\Big(\dfrac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_F}{k_BT}\Big)\Big]^2}=\frac{\exp\Big(\dfrac{\mathcal{E}_F(P^2-1)}{k_BT}\Big)}{\Big[1+\exp\Big(\dfrac{\mathcal{E}_F(P^2-1)}{k_BT}\Big)\Big]^2},$$

$$f_F^{\pm} = f_F(P_{\pm}) = \frac{1}{1+\exp\left[\dfrac{\mathcal{E}_F}{k_BT}\Big(P_{\pm}^2 - \dfrac{\mu}{\mathcal{E}_F}\Big)\right]} = \frac{1}{1+\exp\dfrac{\mathcal{E}^{\pm}-\mu}{k_BT}}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E}^{\pm} = \frac{1}{2m}\Big(\mathbf{p} \mp \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\Big)^2, \quad P_{\pm}^2 = \Big(\mathbf{P} \mp \frac{\hbar\mathbf{k}}{2p_F}\Big)^2, \quad \mathcal{E}_F = \frac{mv_F^2}{2}.$$

Перейдем в (4.1$'$) к пределу при $T \to 0$. При этом химический потенциал переходит в энергию электронов на поверхности Ферми, т.е. $\mu \to \mathcal{E}_F$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{T\to 0} f_F^{\pm} = \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}^{\pm}) \equiv \Theta(1-P_{\pm}^2) \equiv \Theta^{\pm},$$

$$\lim_{T\to 0}\frac{g(P)}{k_BT} = -\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\left[\lim_{T\to 0}\frac{1}{1+\exp\dfrac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_F}{k_BT}}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}).$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта–функция Дирака, $\Theta(x)$ – функция Хэвисайда,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

$\mathcal{E}_F = \dfrac{mv_F^2}{2} = \dfrac{p_F^2}{2m}$ – кинетическая энергия электронов на поверхности Ферми, $\mathcal{E} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия электронов,

$$\Theta^{\pm} \equiv \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}^{\pm}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{E}^{\pm} < \mathcal{E}_F, \\ 0, & \mathcal{E}^{\pm} > \mathcal{E}_F, \end{cases}$$

$$\Theta^{\pm} \equiv \Theta(1-P_{\pm}^2) = \begin{cases} 1, & P_{\pm} < 1, \\ 0, & P_{\pm} > 1. \end{cases}$$

Следовательно, выражение для поперечной проводимости вырожденной квантовой плазмы имеет вид:

$$\sigma_{tr} = \frac{e^2m^3v_F^5}{(2\pi\hbar)^3\omega}\int\left[(\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}) + \frac{\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^+)-\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^-)}{\hbar\nu}\right]\times$$

$$\times\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}. \qquad (4.2)$$

Теперь с помощью уравнения состояния для вырожденной плазмы

$$\Big(\frac{mv_F}{\hbar}\Big)^3=3\pi^2N^{(0)},$$

преобразуем формулу (4.2) к виду:

$$\sigma_{tr}=\sigma_0\frac{3mv_F^2}{8\pi}\int\Big[\big(1-\frac{\mathbf{k}_1\mathbf{P}}{\omega\tau}\big)\delta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E})+$$

$$+\frac{1}{\hbar\omega}\big[\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^+)-\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^-)\big]\Big]\frac{P_\perp^2\,d^3P}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}.$$

Заметим, что

$$\delta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E})=\delta\Big(\frac{mv_F^2}{2}(1-P^2)\Big)=\frac{2}{mv_F^2}\delta(1-P^2)=$$

$$=\frac{1}{mv_F^2}\delta(1-P).$$

С помощью этого равенства выражение для $\sigma_{tr}$ можно записать в виде:

$$\sigma_{tr}=\sigma_0\frac{3}{8\pi}\Bigg[\int\frac{\big(1-(\omega\tau)^{-1}\mathbf{k}_1\mathbf{P}\big)\delta(1-P)}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}P_\perp^2\,d^3P+$$

$$+\frac{mv_F^2}{\hbar\omega}\int\frac{\Theta(1-P_+^2)-\Theta(1-P_-^2)}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}P_\perp^2\,d^3P\Bigg]. \qquad (4.3)$$

Здесь

$$P_\pm^2=\Big(P_x^2\pm\frac{\hbar k}{2p_F}\Big)^2+P_y^2+P_z^2,$$

$$\Theta(1-P_\pm^2)=\Theta\Big[1-\Big(P_x^2\pm\frac{\hbar k}{2p_F}\Big)^2-P_y^2-P_z^2\Big],$$

то-есть,

$$\Theta(1-P_\pm^2)\equiv\Theta^\pm(\mathbf{P})=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \Big(P_x\mp\dfrac{\hbar k}{2p_F}\Big)^2+P_y^2+P_z^2<1,\\[2ex] 0, & \text{если}\quad \Big(P_x\mp\dfrac{\hbar k}{2p_F}\Big)^2+P_y^2+P_z^2>1.\end{cases}$$

Покажем, что формулу (4.3) можно вывести точно так же, как и общую формулу (3.1).

Для этого возьмем кинетическое уравнение Вигнера — Власова — Больцмана для вырожденной столкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nu(f^{(0)} - f) + W[f].$$

Здесь $f^{(0)}$ – локально равновесная функция распределения Ферми — Дирака для полностью вырожденной плазмы (с нулевой температурой),

$$f^{(0)} = \Theta[1 - C^2(\mathbf{r},\mathbf{p},t)] = \Theta\Big[1 - \Big(\mathbf{P} - \frac{e\mathbf{A}}{cp_F}\Big)^2\Big],$$

где

$$\mathbf{C}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \equiv \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v_F}} = \frac{\mathbf{p}}{p_F} - \frac{e}{cm}\mathbf{A} = \mathbf{P} - \frac{e}{cm}\mathbf{A},$$

$W[f]$ – интеграл Вигнера — Власова, который в линейном приближении имеет вид

$$W[f] = \frac{iev_F}{c\hbar}\mathbf{PA}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\Big[\Theta^+ - \Theta^-\Big],$$

где

$$\Theta^{\pm} \equiv \Theta(1 - P_{\pm}^2), \qquad P_{\pm}^2 = \Big(\mathbf{P} \mp \frac{\hbar\mathbf{k}}{2p_F}\Big)^2.$$

Разложим функцию $f^{(0)}$ в линейном приближении по степеням вектора $\mathbf{A}$:

$$f^{(0)} = f^{(0)}\Big|_{\mathbf{A}=0} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{A}}\Big|_{\mathbf{A}=0}\mathbf{A}.$$

По этой формуле вычисляем линейное приближение распределения Ферми — Дирака:

$$f^{(0)} = \Theta\Big[1 - \Big(\mathbf{P} - \frac{e\mathbf{A}}{cp_F}\Big)^2\Big] = \Theta(1 - P^2) + \delta(1 - P)\frac{e}{cp_F}\mathbf{PA}.$$

Функцию Вигнера ищем в виде:

$$f = \Theta(1 - P^2) + \delta(1 - P)\frac{e}{cp_F}\mathbf{PA} + \delta(1 - P)\mathbf{PA}h(\mathbf{P}) =$$

$$= f^{(0)} + \delta(1-P)\mathbf{PA}h(\mathbf{P}).$$

Подставим последние два выражения в кинетическое уравнение. Проведем линеаризацию последнего и из полученного уравнения находим, что

$$\delta(1-P)(\mathbf{PA})h(\mathbf{P}) =$$

$$= \frac{ie}{cp_F}\frac{(\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P) + \dfrac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+ - \Theta^-)}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}.$$

Итак, функция Вигнера построена и имеет следующий вид:

$$f = f^{(0)} + \frac{ie}{cp_F}\frac{(\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P) + \dfrac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+ - \Theta^-)}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}.$$

Рассмотрим выражение для плотности тока в вырожденной плазме

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\int \mathbf{v}(\mathbf{r},t)f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)d\Omega_F,$$

где

$$d\Omega_F = \frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_F^3 d^3P}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Подставим в выражение для плотности тока построенную функцию Вигнера. Получаем, что

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\int \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\big[f^{(0)} + \delta(1-P)(\mathbf{PA})h(\mathbf{P})\big]d\Omega_F.$$

Учитывая, что плотность тока в равновесном состоянии равна нулю, отсюда находим следующее выражение для плотности тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\int \mathbf{v}(\mathbf{r},t)(\mathbf{PA})\delta(1-P)h(\mathbf{P})d\Omega_F.$$

Перепишем это соотношение в явном виде:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{2ie^2p_F^3}{(2\pi\hbar)^3cp_F}\int \mathbf{v}(\mathbf{PA})\frac{(\omega\tau - \mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P) + \dfrac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+ - \Theta^-)}{1 - i\omega\tau + i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}d^3P.$$

После линеаризации этого выражения находим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{2ie^2p_F^3}{(2\pi\hbar)^3cm}\int\mathbf{P}(\mathbf{PA})\frac{(\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P)+\dfrac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+-\Theta^-)}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}d^3P.$$

Рассуждая далее так же, как и выше, получаем следующее выражение для поперечной проводимости

$$\sigma_{tr}=\frac{3\sigma_0}{8\pi\omega\tau}\int\frac{(\omega\tau-\mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P)+\dfrac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+-\Theta^-)}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}P_\perp^2d^3P,$$

или

$$\sigma_{tr}=\frac{3\sigma_0}{8\pi}\int\frac{(1-(\omega\tau)^{-1}\mathbf{k}_1\mathbf{P})\delta(1-P)+\dfrac{mv_F^2}{\hbar\omega}(\Theta^+-\Theta^-)}{1-i\omega\tau+i\mathbf{k}_1\mathbf{P}}P_\perp^2d^3P.$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (4.3).

Рассмотрим частный случай поперечной проводимости, когда волновое число $k$ равно нулю. Тогда в формуле (4.3) второе (квантовое) слагаемое выпадает и мы получаем:

$$\sigma_{tr}(k=0)=\sigma_{tr}^{\text{classic}}(k=0)=\sigma_0\frac{3}{4\pi}\frac{\nu}{\nu-i\omega}\int\delta(1-P)P_y^2\,d^3P,$$

откуда получаем известную формулу для классической плазмы:

$$\sigma_{tr}(k=0)=\sigma_{tr}^{\text{classic}}(k=0)=\sigma_0\frac{\nu}{\nu-i\omega}.$$

Далее везде ниже направим ось $x$ вдоль вектора $\mathbf{k}_1$. Рассмотрим случай малых значений произведения $\hbar k$. Заметим, что

$$\Theta^\pm\equiv\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^\pm)=\begin{cases}1,\quad\text{если}\quad\left(p_x\mp\dfrac{\hbar k}{2}\right)^2+p_y^2+p_z^2<p_F^2,\\ 0,\quad\text{если}\quad\left(p_x\mp\dfrac{\hbar k}{2}\right)^2+p_y^2+p_z^2>p_F^2\end{cases}.$$

Здесь

$$\mathcal{E}^\pm=\frac{1}{2m}\left(p_x\mp\frac{\hbar k}{2}\right)^2+\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2m}p_z^2.$$

Разложим $\Theta^\pm$ по степеням $\hbar k$ до третьего порядка включительно:

$$\Theta^\pm=\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}^\pm)=\Theta(1-P_\pm^2)=$$

$$
= \Theta(1-P^2) \pm \delta(1-P^2)P_x\frac{\hbar k}{p_F} +
$$

$$
+\Big[\delta'(1-P^2)P_x^2 - \frac{1}{2}\delta(1-P^2)\Big]\frac{\hbar^2k^2}{2p_F^2} \pm
$$

$$
\pm\Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^3k^3}{6p_F^3}.
$$

Отсюда следует, что

$$
\Theta^+ - \Theta^- = 2\delta(1-P^2)P_x\frac{\hbar k}{p_F} +
$$

$$
+\Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^3k^3}{3p_F^3}.
$$

Формулу для вычисления поперечной проводимости представим в виде:

$$
\sigma_{tr} = \sigma_0 \cdot f_{tr},
$$

где

$$
f_{tr} = \frac{3}{8\pi\omega\tau}\int\Big[(\omega\tau - k_1P_x)\delta(1-P) +
$$

$$
+\frac{mv_F^2}{\hbar\nu}(\Theta^+ - \Theta^-)\Big]\frac{(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x},
$$

или

$$
f_{tr} = \frac{3}{8\pi}\int\Big[\Big(1-\frac{k_1P_x}{\omega\tau}\Big)\delta(1-P) + \frac{mv_F^2}{\hbar\omega}(\Theta^+ - \Theta^-)\Big]\frac{(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}.
$$

Рассмотрим подынтегральное выражение из равенства для $f_{tr}$:

$$
\Big(1-\frac{k_1P_x}{\omega\tau}\Big)\delta(1-P) + \frac{mv_F^2}{\hbar\omega}(\Theta^+ - \Theta^-) =
$$

$$
= \delta(1-P) - \frac{k_1P_x}{\omega\tau}\delta(1-P) + 2\delta(1-P^2)P_x\frac{mv_F^2k}{\omega p_F} +
$$

$$
+\frac{mv_F^2}{\hbar\omega}\Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^3k^3}{3p_F^3} =
$$

$$
= \delta(1-P) + \Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\Big(\frac{\hbar\nu}{mv_F^2}\Big)^2\frac{k_1^3}{3\omega\tau}.
$$

Поэтому поперечная проводимость при малых $\hbar k$ равна:

$$\sigma_{tr}=\sigma_{tr}^{\text{classic}}+$$
$$+\frac{\sigma_0\hbar^2\nu^2k_1^3}{8\pi(mv_F^2)^2\omega\tau}\int\frac{\delta''(1-P^2)P_x^3-\frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}(P^2-P_x^2)\,d^3P.$$

Здесь $k_1=kl,\ l=v_F\tau$ – длина свободного пробега электронов,

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}}=\sigma_0\frac{3}{8\pi}\int\frac{\delta(1-P)(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}.$$

Из последней формулы следует, что при $\hbar\to 0\quad \sigma_{tr}\to\sigma_{tr}^{\text{classic}}$, т.е. при стремлении постоянной Планка к нулю поперечная проводимость переходит в классическую.

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}}=\frac{3\sigma_0}{8\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\delta(1-P)P^4(1-\mu^2)}{1-i\omega\tau+ik_1P\mu}d\mu dPd\chi=$$

$$=\frac{3\sigma_0}{4}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-\mu^2)d\mu}{1-i\omega\tau+ik_1P\mu}=-\frac{3i}{4k_1}\sigma_0\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-\mu^2)d\mu}{\mu-z/q}=$$

$$=-\frac{3iy}{4q}\sigma_0\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-\mu^2)d\mu}{\mu-z/q}=\sigma_0\frac{3i}{4}\Big[2\frac{yz}{q^2}+y\frac{z^2-q^2}{q^3}\ln\frac{z-q}{z+q}\Big].$$

Здесь введены безразмерные параметры:

$$z=x+iy,\quad x=\frac{\omega}{k_Fv_F},\quad y=\frac{\nu}{k_Fv_F},\quad q=\frac{k}{k_F}.$$

Рассмотрим разложение классической поперечной проводимости по степеням волнового числа. Для этого разложим ядро выражения проводимости в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}=\frac{1}{1-i\omega\tau}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{ik\mu}{1-i\omega\tau}}=$$

$$= \frac{1}{1-i\omega\tau}\Big[1 - \frac{ik_1\mu}{1-i\omega\tau} - \frac{k_1^2\mu^2}{(1-i\omega\tau)^2} + \frac{ik_1^3\mu^3}{(1-i\omega\tau)^3} +$$

$$+ \frac{k_1^4\mu^4}{(10i\omega\tau)^4} - \frac{ik_1^5\mu^5}{(1-i\omega\tau)^5} - \frac{k_1^6\mu^6}{(1-i\omega\tau)^6} + \cdots\Big].$$

Теперь мы получаем следующее разложение классической поперечной проводимости по степеням волнового числа:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \frac{i\nu\sigma_0}{\omega+i\nu}\Big[1 + \frac{k_1^2\nu^2}{5(\omega+i\nu)^2} + \frac{3k_1^4\nu^4}{35(\omega+i\nu)^4} + \frac{k_1^6\nu^6}{21(\omega+i\nu)^6} + \cdots\Big],$$

или

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \frac{i\nu\sigma_0}{\omega+i\nu}\Big[1 + \frac{k^2 v_F^2}{5(\omega+i\nu)^2} + \frac{3k^4 v_F^4}{35(\omega+i\nu)^4} + \frac{k^6 v_F^6}{21(\omega+i\nu)^6} + \cdots\Big].$$

Перейдем к разложению по степеням волнового числа квантовой составляющей поперечной проводимости. Для этого разложим по степеням волнового числа распределения Ферми — Дирака $\Theta^{\pm} = \Theta(1-P_{\pm}^2)$:

$$\Theta^{\pm} = \Theta(1-P_{\pm}^2) = \Theta(1-P^2) \pm \delta(1-P^2)P_x\frac{\hbar k}{2p_F} +$$

$$+\Big[\delta'(1-P^2)P_x^2 - \frac{1}{2}\delta(1-P^2)\Big]\frac{\hbar^2k^2}{2p_F^2} \pm$$

$$\pm\Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\frac{h^3k^3}{6p_F^3} +$$

$$+\Big[\delta'''(1-P^2)P_x^4 - 3\delta''(1-P^2)P_x^2 + \frac{3}{4}\delta'(1-P^2)\Big]\frac{\hbar^4k^4}{24p_F^4} \pm$$

$$\pm\Big[\delta^{(4)}(1-P^2)P_x^5 - 5\delta'''(1-P^2)P_x^3 + \frac{15}{4}\delta''(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^5k^5}{120p_F^5} + \cdots .$$

Из этих разложений получаем разность:

$$\Theta^{+} - \Theta^{-} = 2\delta(1-P^2)P_x\frac{\hbar k}{p_F} +$$

$$+\Big[\delta''(1-P^2)P_x^3 - \frac{3}{2}\delta'(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^3k^3}{3p_F^3} +$$

$$+\Big[\delta^{(4)}(1-P^2)P_x^5-5\delta'''(1-P^2)P_x^3+\frac{15}{4}\delta''(1-P^2)P_x\Big]\frac{\hbar^5k^5}{60p_F^5}+\cdots.$$

Теперь разложение квантовой составляющей поперечной проводимости имеет следующее разложение по степеням волнового числа:

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}}=i\sigma_0\frac{7(\omega\tau+i)^2k_1^6+10k_1^8}{140\omega\tau(\omega\tau+i)^6}\Big(\frac{\hbar\nu}{2\mathcal{E}_F}\Big)^2+\cdots,$$

или

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}}=i\sigma_0\Big[\frac{\nu v_F^4}{20\omega m^2(\omega+i\nu)^4}(\hbar^2k^6)+\frac{\nu v_F^4}{14\omega m^2(\omega+i\nu)^6}(\hbar^2k^8)+\cdots\Big].$$

Выражение (4.3) для поперечной проводимости представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\sigma_{tr}=\sigma_{tr}^{\text{classic}}+\sigma_{tr}^{\text{quant}}. \tag{4.4}$$

В равенстве (4.4) введены обозначения:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}}=\sigma_0\frac{3}{8\pi}\int\frac{\delta(1-P)(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}, \tag{4.5}$$

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}}=\sigma_0\frac{3}{8}\frac{\nu}{\omega}\Bigg[-v_Fk\int\frac{P_x\delta(1-P)(P^2-P_x^2)\,d^3P}{\nu-i\omega+ikv_FP_x}+$$
$$+\frac{mv_F^2}{\hbar}\int\frac{\Theta^+(\mathbf{P})-\Theta^-(\mathbf{P})}{\nu-i\omega+ikv_FP_x}(P^2-P_x^2)d^3P\Bigg], \tag{4.6}$$

или, преобразуя слегка квантовое слагаемое (4.6),

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}}=\sigma_0\frac{3}{8\pi}\Bigg[-\frac{k_1}{\omega\tau}\int\frac{P_x\delta(1-P)(P^2-P_x^2)\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}+$$
$$+\frac{mv_F^2}{\hbar\omega}\int\frac{\Theta(1-P_+^2)-\Theta(1-P_-^2)}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}(P^2-P_x^2)\,d^3P\Bigg].$$

Выражение (4.5) для $\sigma_{tr}^{\text{classic}}$ легко вычисляется в явном виде:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}}=-\sigma_0\frac{3}{4}\Big[2\nu\frac{\nu-i\omega}{k^2v_F^2}-i\nu\frac{(\nu-i\omega)^2+k^2v_F^2}{k^3v_F^3}\ln\frac{\nu-i\omega+ikv_F}{\nu-i\omega-ikv_F}\Big], \tag{4.7}$$

или, в безразмерных параметрах,

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = -\sigma_0 \frac{3}{4}\Big[2\frac{1-i\omega\tau}{k_1^2} + i\frac{(1-i\omega\tau)^2+k_1^2}{k_1^3}\ln\frac{1-i\omega\tau+ik_1}{1-i\omega\tau-ik_1}\Big].$$

Предыдущей формуле (4.7) можно придать и такие формы:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \sigma_0 \frac{3i}{4}\Big[2\frac{\omega\tau+i}{k_1^2} + \frac{(\omega\tau+i)^2-k_1^2}{k_1^3}\ln\frac{\omega\tau+i-k_1}{\omega\tau+i+k_1}\Big],$$

и

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \sigma_0 \frac{3i}{4}\Big[2\nu\frac{\omega+i\nu}{k^2v_F^2} + \nu\frac{(\omega+i\nu)^2-k^2v_F^2}{k^3v_F^3}\ln\frac{\omega+i\nu-kv_F}{\omega+i\nu+ikv_F}\Big],$$

Введем безразмерные переменные:

$$z=\frac{\omega+i\nu}{k_Fv_F}=x+iy, \quad x=\frac{\omega}{k_Fv_F}, \quad y=\frac{\nu}{k_Fv_F}, \quad q=\frac{k}{k_F},$$

где $k_F$ – волновое число Ферми, $k_F = \dfrac{mv_F}{\hbar} = \dfrac{p_F}{\hbar}$. Тогда формулу (4.7) можно переписать в виде:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = \sigma_0 \frac{3i}{4}\Big[2\frac{yz}{q^2} + y\frac{z^2-q^2}{q^3}\ln\frac{z-q}{z+q}\Big], \tag{4.8}$$

или

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = i\sigma_0 \Big[\frac{3yz}{2q^2} + \frac{3y}{4q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}\Big]. \tag{4.8$'$}$$

Формулу (4.6) представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}} = \sigma_1+\sigma_2, \tag{4.9}$$

где

$$\sigma_1 = -\sigma_0\frac{3}{4}\cdot\frac{\nu v_F k}{\omega}J_1 = -\sigma_0\frac{3}{4}\cdot\frac{\nu}{\omega}k_1J_1,$$

где

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int\frac{P_x\delta(1-P)(P^2-P_x^2)}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}d^3P, \tag{4.10}$$

и

$$\sigma_2=\sigma_0\frac{3}{4\pi}\frac{\nu}{\omega}\frac{mv_F^2}{\hbar\nu}J_2,$$

где

$$J_2=\frac{1}{2}\int\frac{\Theta^+(\mathbf{P})-\Theta^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}(P^2-P_x^2)d^3P. \tag{4.11}$$

Вычисляя интеграл $J_1$ в сферических координатах, получаем, что

$$J_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mu(1-\mu^2)d\mu}{1-i\omega\tau+ik_1\mu} =$$

$$= -i\frac{4}{3k_1} - 2i\frac{(1-i\omega\tau)^2}{k_1^3} + (1-i\omega\tau)\frac{(1-i\omega\tau)^2+k_1^2}{k_1^4}\ln\frac{1-i\omega\tau+ik_1}{1-i\omega\tau-ik_1} =$$

$$= -\frac{4i}{3k_1}\Big[1+\frac{3(1-i\omega\tau)^2}{2k_1^2}+\frac{3i(1-i\omega\tau)}{4k_1^3}[(1-i\omega\tau)^2+k_1^2]\ln\frac{1-i\omega\tau+ik_1}{1-i\omega\tau-ik_1}\Big].$$

Следовательно, слагаемое $\sigma_1$ равно:

$$\sigma_1 = \frac{i\sigma_0}{\omega\tau}\Big[1+\frac{3(1-i\omega\tau)^2}{2k_1^2}+\frac{3i(1-i\omega\tau)}{4k_1^3}\times$$

$$\times[(1-i\omega\tau)^2+k_1^2]\ln\frac{1-i\omega\tau+ik_1}{1-i\omega\tau-ik_1}\Big], \qquad (4.12)$$

или

$$\sigma_1 = \frac{i\sigma_0}{\omega\tau}\left[1-\frac{3(\omega\tau+i)^2}{2k_1^2}+\frac{3(\omega\tau+i)}{4k_1^3}\times\right.$$

$$\left.\times[k_1^2-(\omega\tau+i)^2]\ln\frac{\omega\tau+i+k_1}{\omega\tau+i-k_1}\right],$$

или

$$\sigma_1 = i\sigma_0\frac{\nu}{\omega}\left[1-\frac{3(\omega+i\nu)^2}{2k^2v_F^2}-\frac{3(\omega+i\nu)}{k^3v_F^3}\Big[(\omega+i\nu)^2-\right.$$

$$\left.-k^2v_F^2\Big]\ln\frac{\omega+i\nu-kv_F}{\omega+i\nu+kv_F}\right].$$

Перейдем к вычислению слагаемого $\sigma_2$, которое представим в виде:

$$\sigma_2 = \sigma_0\frac{3\nu}{8\omega}\cdot\frac{mv_F^2}{\pi\hbar\nu}\int\frac{\Theta^+(\mathbf{P})-\Theta^-(\mathbf{P})}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}(P^2-P_x^2)\,d^3P. \qquad (4.13)$$

Представим формулу (4.13) в виде разности:

$$\sigma_2 = \sigma_0\frac{3\nu}{8\omega}\cdot\frac{mv_F^2}{\pi\hbar\nu}\left[\int\frac{\Theta^+(\mathbf{P})[P^2-P_x^2]\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}-\int\frac{\Theta^-(\mathbf{P})[P^2-P_x^2]\,d^3P}{1-i\omega\tau+ik_1P_x}\right],$$

или

$$\sigma_2 = \sigma_0 \frac{3\nu}{4\omega} \cdot \frac{mv_F^2}{\pi\hbar\nu}(J^+ - J^-),$$

где

$$J^\pm = \frac{1}{2}\int \frac{\Theta^\pm(\mathbf{P})(P^2 - P_x^2)\,d^3P}{1 - i\omega\tau + ik_1P_x}.$$

Нетрудно видеть, что эти интегралы равны:

$$J^\pm = \frac{1}{2}\int\limits_{S_3^\pm} \frac{(P^2 - P_x^2)\,d^3P}{1 - i\omega\tau + ik_1P_x}.$$

Здесь $S_3^\pm = S_3\Big(\pm\dfrac{\hbar k}{2p_F}, 0, 0\Big)$ — трехмерный шар единичного радиуса с центром в точке $\Big(\pm\dfrac{\hbar k}{2p_F}, 0, 0\Big)$:

$$S_3^\pm\Big(\pm\frac{\hbar k}{2p_F}, 0, 0\Big) \equiv \Big\{(P_x, P_y, P_z) : \Big(P_x \mp \frac{\hbar k}{2p_F}\Big)^2 + P_y^2 + P_z^2 < 1\Big\}.$$

После очевидной замены переменных получаем, что

$$J^\pm = \frac{1}{2}\int\limits_{S_3^\pm} \frac{(P_y^2 + P_z^2)\,d^3P}{1 - i\omega\tau + ik_1P_x} = \frac{1}{2}\int\limits_{S_3(\mathbf{0})} \frac{(P_y^2 + P_z^2)\,d^3P}{1 - i\omega\tau + ik_1\Big(P_x \pm \dfrac{\hbar\nu k_1}{2mv_F^2}\Big)},$$

где $S_3(\mathbf{0})$ — шар с центром в нуле единичного радиуса,

$$S_3(\mathbf{0}) = \big\{(P_x, P_y, P_z) : P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 < 1\big\}.$$

Теперь нетрудно найти, что слагаемое $\sigma_2$ вычисляется по формуле:

$$\sigma_2 = -i\sigma_0 \frac{3k_1^2}{8\pi\omega\tau}\int\limits_{S_3(\mathbf{0})} \frac{(P_y^2 + P_z^2)\,d^3P}{(1 - i\omega\tau + ik_1P_x)^2 + \Big(\dfrac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2}\Big)^2}. \tag{4.14}$$

Шар $S_3(\mathbf{0})$ представим в виде объединения:

$$S_3(\mathbf{0}) = \bigcup_{P_x=-1}^{P_x=1} S^2_{1-P_x^2}(0, 0).$$

Здесь $S^2_{1-P_x^2}(0,0)$ есть круг вида:

$$S^2_{1-P_x^2}(0,0) = \left\{(P_y, P_z) : P_y^2 + P_z^2 < 1 - P_x^2\right\}.$$

Теперь интегралы $J^{\pm}$ вычислим как повторные:

$$J^{\pm} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dP_x}{1 - i\omega\tau + ik_1\Big(P_x \pm \dfrac{\hbar\nu k}{2mv_F^2}\Big)} \iint\limits_{S^2_{1-P_x^2}(0,0)} (P_y^2 + P_z^2)\, d\mathbf{P}_\perp =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dP_x}{1 - i\omega\tau + ik_1\Big(P_x \pm \dfrac{\hbar\nu k_1}{2mv_F^2}\Big)} \int\limits_{0}^{1-P_x^2}\int\limits_{0}^{2\pi} P_\perp^3\, dP_\perp\, d\chi =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^2 dt}{1 - i\omega\tau + ik_1\Big(t \pm \dfrac{\hbar\nu k_1}{2mv_F^2}\Big)}, \qquad t = P_x.$$

Заметим, что

$$ik_1 \cdot \frac{\hbar\nu k_1}{2mv_F^2} = i\frac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2} = i\frac{\hbar\nu k_1^2}{4\mathcal{E}_F} = ic_0,$$

причем

$$c_0 = \frac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2} = \frac{k_1^2}{2k_F l} = \frac{k_1^2}{2k_{01}}.$$

Здесь $k_{01}$ – безразмерное волновое число Ферми, $k_{01} = k_F l$.

Теперь слагаемое $\sigma_2$ равно:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \frac{3\nu}{4\omega} \cdot \frac{mv_F^2}{\pi\hbar\nu}[J^+ - J^-] =$$

$$= \sigma_0 \frac{3\nu}{16\omega}\frac{mv_F^2}{\hbar\nu}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\frac{(1-t^2)^2}{1 - i\omega\tau + ik_1 t + ic_0} - \frac{(1-t^2)^2}{1 - i\omega\tau + ik_1 t - ic_0}\Big] dt =$$

$$= -i\sigma_0 \frac{3k_1^2}{16\omega\tau}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^2\, dt}{(1 - i\omega\tau + ik_1 t)^2 + c_0^2}.$$

Рассмотрим знаменатель:

$$(1-i\omega\tau+ik_1t)^2+c_0^2=-\Big[k_1^2\Big(t-\frac{\omega\tau+i}{k_1}\Big)^2-c_0^2\Big]=$$

$$=-k_1^2\Big[\Big(t-\frac{\omega\tau+i}{k_1}\Big)^2-\Big(\frac{k_1\hbar}{2p_Fl}\Big)^2\Big]=-k_1^2\Big[(t-a)^2-c^2\Big],$$

где

$$a=\frac{\omega\tau+i}{k_1}=\frac{z}{q},\qquad c=\frac{k_1\hbar}{2p_Fl}=\frac{k_1}{2k_Fl}=\frac{k_1}{2k_{01}}=\frac{q}{2}.$$

Таким образом, выражение (4.14) можно записать в виде:

$$\sigma_2=i\sigma_0\frac{3}{16\omega\tau}\cdot J, \tag{4.15}$$

где

$$J=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^2\,dt}{(t-a)^2-c^2}.$$

После замены переменной $t-a=x,\ x_0=-1-a,\ x_1=-1+a$, получаем, что

$$J=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{[1-(x-a)^2]^2}{x^2-c^2}dx=$$

$$=\frac{(a^2+c^2-1)^2+4a^2c^2}{2c}\ln\frac{a^2-(c-1)^2}{a^2-(c+1)^2}+6a^2+2c^2-\frac{10}{3}+$$

$$+2a(a^2+c^2-1)\ln\frac{(a-1)^2-c^2}{(a+1)^2-c^2}.$$

Значение этого интеграла в параметрах $z$ и $q$ выражается равенством:

$$J=\frac{(z^2-q^2+q^4/4)^2+z^2q^4}{q^5}\ln\frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)^2}+6\frac{z^2}{q^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{10}{3}+$$

$$+2\frac{z}{q^3}(z^2-q^2+q^4/4)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}.$$

Выражение (4.15) для $\sigma_2$ с помощью предыдущего выражения для $J$ представим в виде:

$$\sigma_2=i\sigma_0\frac{3y}{8x}\Big[-\frac{5}{3}+3\frac{z^2}{q^2}+\frac{q^2}{4}+\frac{1}{2q^5}\Big[\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)^2+z^2q^4\Big]\times$$

$$\times \ln \frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)} + \frac{z}{q^3}\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}\Bigg]. \quad (4.16)$$

Формулу (4.12) для $\sigma_1$ представим в терминах $z$ и $q$:

$$\sigma_1 = i\sigma_0\frac{y}{x}\Big[1-\frac{3z^2}{2q^2}-\frac{3z}{4q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}\Big], \qquad (4.17)$$

С помощью равенств (4.16) и (4.17) получаем квантовую часть поперечной проводимости:

$$\sigma_{tr}^{\text{quant}} = i\sigma_0\frac{3y}{8x}\Big[1-\frac{z^2}{q^2}+\frac{q^2}{4}-\frac{2z}{q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}+$$

$$+\frac{1}{2q^5}\Big[\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)^2+z^2q^4\Big]\ln\frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)^2}+$$

$$+\frac{z}{q^3}\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}\Big]. \qquad (4.18)$$

Отметим, что выражения (4.17) и (4.18) содержит коновские особенности вида $x\ln x$, где $x=z-q$, или $x=z+q$.

Теперь осталось сложить квантовое слагаемое (4.18) и классическое (4.8), причем (4.8) для этого представим в аналогичной (4.18) форме:

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = i\sigma_0\frac{3y}{8x}\Big[\frac{4xz}{q^2}+\frac{2x}{q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}\Big]. \qquad (4.19)$$

Складывая (4.18) и (4.19), получаем окончательное выражение для поперечной проводимости в квантовой плазме:

$$\sigma_{tr}(x,y,q) = i\sigma_0\frac{3y}{8x}\Bigg\{1+\frac{z(3x-iy)}{q^2}+\frac{q^2}{4}-\frac{2iy}{q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}+$$

$$+\frac{1}{2q^5}\Big[\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)^2+z^2q^4\Big]\ln\frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)^2}+$$

$$+\frac{z}{q^3}\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}\Bigg\}. \qquad (4.20)$$

Для графического исследования проводимости удобнее вместо формулы (4.20) использовать эквивалентную:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = -iy\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)dt}{qt-z} + i\frac{3yq}{4x}\int\limits_{-1}^{1}\frac{t(1-t^2)dt}{qt-z} +$$

$$+ i\frac{3yq^2}{16x}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^2dt}{(qt-z)^2-q^4/4}. \qquad (4.21)$$

## 5. СРАВНЕНИЕ С ФОРМУЛАМИ ЛИНДХАРДА

Рассмотрим формулу Линдхарда (5.3.4) из [16] для поперечной проводимости. После предельного перехода при $\eta \to 0$ из (5.3.4) получаем:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{q},\omega) = \frac{iNe^2}{\omega m} - \frac{i}{\Omega}\frac{e^2}{\omega m^2}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\frac{f^0(\mathcal{E}_k)}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k-q}} - \hbar(\omega + i\nu)} -$$

$$- \frac{f^0(\mathcal{E}_k)}{\mathcal{E}_{\mathbf{k+q}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \hbar(\omega + i\nu)}\Bigg]|\langle\mathbf{k}+\mathbf{q}|\mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle_*|^2. \qquad (5.1)$$

Здесь $f^0(\mathcal{E}_k)$ – абсолютное распределение Ферми — Дирака, $\mathcal{E}_k = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$; кроме того, сумма из (5.1) понимается как интеграл:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{k}} = \int\frac{2d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Представим формулу (5.1) в виде:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{q},\omega) = \frac{i\sigma_0}{\omega\tau} + \hat{\sigma}_2, \qquad (5.2)$$

где

$$\hat{\sigma}_2 = -\frac{i}{\Omega}\frac{e^2}{\omega m^2}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\frac{f^0(\mathcal{E}_k)}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k-q}} - \hbar(\omega + i\nu)} -$$

$$
-\frac{f^0(\mathcal{E}_k)}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mathcal{E}_{\mathbf{k}}-\hbar(\omega+i\nu)}\Bigg]|\langle\mathbf{k}+\mathbf{q}|\mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle_*|^2. \tag{5.3}
$$

Представим формулу (5.3) в интегральной форме:

$$
\hat{\sigma}_2=-\frac{ie^2}{m\omega}\int\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E})\frac{2d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[k^2-\left(\frac{\mathbf{kq}}{q}\right)^2\right]\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{q^2+2\mathbf{kq}-\dfrac{2m}{\hbar}(\omega+i/\tau)}+\frac{1}{q^2-2\mathbf{kq}+\dfrac{2m}{\hbar}(\omega+i/\tau)}\right]. \tag{5.4}
$$

Преобразуем формулу (5.4). Направим волновой вектор $\mathbf{q}$ вдоль $x$–компоненты импульса, т.е. возьмем $\mathbf{q}=\{k,0,0\}$, а вместо вектора $\mathbf{k}$ введем безразмерный вектор $\mathbf{P}$ следующим равенством:

$$
\mathbf{k}=\frac{\mathbf{p}}{\hbar}=\frac{p_F}{\hbar}\mathbf{P},\qquad p_F=mv_F.
$$

Тогда

$$
k^2-\left(\frac{\mathbf{kq}}{q}\right)^2=\frac{p_F^2}{\hbar^2}\Big(P^2-P_x^2\Big)=\frac{p_F^2}{\hbar^2}\Big(P_y^2+P_z^2\Big),
$$

$$
\frac{2d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}=\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{2p_F^3\,d^3P}{(2\pi\hbar)^3}\equiv d\Omega_F.
$$

Абсолютный фермиан в наших обозначениях имеет вид:

$$
f^0(\mathcal{E}_k)=\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E}),\qquad \mathcal{E}=\frac{p^2}{2m}=\frac{p_F^2}{2m}P^2=\mathcal{E}_FP^2,\quad \mathcal{E}_F=\frac{p_F^2}{2m}.
$$

Замечая, что абсолютный фермиан нормирован на числовую плотность, т.е.

$$
\int\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E})d\Omega_F=N,
$$

преобразуем вторую квадратную скобку из (5.4). Имеем:

$$
\frac{1}{q^2+2\mathbf{kq}-\dfrac{2m}{\hbar}(\omega+i/\tau)}+\frac{1}{q^2-2\mathbf{kq}+\dfrac{2m}{\hbar}(\omega+i/\tau)}=
$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{1}{\nu-i\omega+ikv_FP_x+i\dfrac{\hbar k^2}{2m}}-\frac{1}{\nu-i\omega+ikv_FP_x-i\dfrac{\hbar k^2}{2m}}\right]=$$

$$=\frac{\hbar^2k^2}{2m^2\nu^2}\frac{1}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+\Big(\dfrac{\hbar k^2}{2m\nu}\Big)^2}=$$

$$=\frac{\hbar^2k_1^2}{2p_F^2}\frac{1}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+\Big(\dfrac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2}\Big)^2}.$$

Теперь мы получаем интегральное слагаемое Линдхарда в форме:

$$\hat{\sigma}_2=-\frac{i\sigma_0 3k_1^2}{8\pi\omega\tau}\int\frac{\Theta(\mathcal{E}_F-\mathcal{E})(P^2-P_x^2)\,d^3P}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+\Big(\dfrac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2}\Big)^2},$$

или, что все равно,

$$\hat{\sigma}_2=-i\sigma_0\frac{3k_1^2}{8\pi\omega\tau}\int\limits_{S_3(\mathbf{0})}\frac{(P_y^2+P_z^2)\,d^3P}{(1-i\omega\tau+ik_1P_x)^2+\Big(\dfrac{\hbar\nu k_1^2}{2mv_F^2}\Big)^2},\qquad(5.5)$$

Формула (5.5) для $\hat{\sigma}_2$ в точности совпадает с формулой (4.14) для $\sigma_2$. Вычисляется $\sigma_2$ согласно (4.16):

$$\sigma_2=i\sigma_0\frac{3y}{8x}\Bigg[-\frac{5}{3}+3\frac{z^2}{q^2}+\frac{q^2}{4}+\frac{1}{2q^5}\Big[\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)^2+z^2q^4\Big]\times$$

$$\times\ln\frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)}+\frac{z}{q^3}\Big(z^2-q^2+\frac{q^4}{4}\Big)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}\Bigg].\qquad(5.6)$$

В монографии [16] приводится следующая формула (формула (5.3.6) из [16]) для вычисления проводимости:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{q},\omega)=\frac{iNe^2}{\omega m}\Bigg(\frac{3}{8}\Big[\Big(\frac{q}{2k_F}\Big)^2+3\Big(\frac{\omega+i/\tau}{qv_F}\Big)^2+1\Big]-$$

$$-\frac{3k_F}{16q}\Big[1-\Big(\frac{q}{2k_F}-\frac{\omega+i/\tau}{qv_F}\Big)^2\Big]^2\mathrm{Ln}\left\{\frac{\dfrac{q}{2k_F}-\dfrac{\omega+i\ \tau}{qv_F}+1}{\dfrac{q}{2k_F}-\dfrac{\omega+i\ \tau}{qv_F}-1}\right\}-$$

$$-\frac{3k_F}{16q}\Big[1-\Big(\frac{q}{2k_F}+\frac{\omega+i/\tau}{qv_F}\Big)^2\Big]^2 \mathrm{Ln}\left\{\frac{\dfrac{q}{2k_F}+\dfrac{\omega+i\,\tau}{qv_F}+1}{\dfrac{q}{2k_F}+\dfrac{\omega+i\,\tau}{qv_F}-1}\right\}\Bigg). \quad (5.7)$$

Перепишем формулу (5.7) в наших обозначениях:

$$\sigma_{tr}^L(x,y,q)=i\sigma_0\frac{3y}{16x}\Bigg\{2\Big[1+3\frac{(x+iy)^2}{q^2}+\frac{q^2}{4}\Big]-$$

$$-\frac{1}{q^5}\Big[q^2-\Big(\frac{q^2}{2}-x-iy\Big)^2\Big]^2\ln\frac{q^2/2-x-iy+q}{q^2/2-x-iy-q}-$$

$$-\frac{1}{q^5}\Big[q^2-\Big(\frac{q^2}{2}+x+iy\Big)^2\Big]^2\ln\frac{q^2/2+x+iy+q}{q^2/2+x+iy-q}\Bigg\}. \quad (5.8)$$

Вычитая из (5.8) калибровочное слагаемое, для интегральной части проводимости $\hat{\sigma}_2$ получаем выражение:

$$\hat{\sigma}_2^L(x,y,q)=i\sigma_0\frac{3y}{16x}\Bigg\{2\Big[-\frac{5}{3}+3\frac{(x+iy)^2}{q^2}+\frac{q^2}{4}\Big]-$$

$$-\frac{1}{q^5}\Big[q^2-\Big(\frac{q^2}{2}-x-iy\Big)^2\Big]^2\ln\frac{q^2/2-x-iy+q}{q^2/2-x-iy-q}-$$

$$-\frac{1}{q^5}\Big[q^2-\Big(\frac{q^2}{2}+x+iy\Big)^2\Big]^2\ln\frac{q^2/2+x+iy+q}{q^2/2+x+iy-q}\Bigg\}. \quad (5.9)$$

Приведем на рис. 1 и 2 графическое сравнение выражений (5.6) и (5.9).

Из формул (5.6) и (5.9) и рис. 1 и 2 видно, что значения этих выражений различаются не только аналитически, но и графически. Следовательно, выражение для проводимости по Линдхарду, приведенное в [16], некорректно.

Вернемся к равенству (5.2) и представим его в виде:

$$\sigma_{tr}^{(1)}(x,y,q)=i\sigma_0\frac{y}{x}+\sigma_2(x,y,q), \quad (5.10)$$

где $\sigma_2(x,y,q)$ определяется равенством (5.6).

Перепишем формулу (5.10) с помощью (5.6) в явном виде:

$$\sigma_{tr}^{(1)}(x,y,q) = i\sigma_0 \frac{3y}{8x}\Bigg[1 + 3\frac{z^2}{q^2} + \frac{q^2}{4} + \frac{1}{2q^5}\Big[\Big(z^2 - q^2 + \frac{q^4}{4}\Big)^2 + z^2q^4\Big]\times$$

$$\times \ln\frac{z^2-(q-q^2/2)^2}{z^2-(q+q^2/2)} + \frac{z}{q^3}\Big(z^2 - q^2 + \frac{q^4}{4}\Big)\ln\frac{(z-q)^2-q^4/4}{(z+q)^2-q^4/4}\Bigg]. \quad (5.11)$$

Теперь поперечная электрическая проводимость по Линхарду определяется выражением (5.11).

Приведем сравнение полученных выражений проводимости.

Из рис. 3, 4, а также из рис. 5, 6 видно, что при малых значениях $q$ кривые 1, отвечающие (4.21), совпадают с кривыми 3, отвечающими (4.8), а при больших $q$ кривые 1 совпадают с кривыми 2, отвечающим выражению Линдхарда (5.10).

Разность проводимостей (4.20) и (5.11) равна:

$$\sigma_{tr} - \sigma_{tr}^{(1)} = \sigma_0\frac{3y^2}{4x}\Big[\frac{2z}{q^2} + \frac{1}{q^3}(z^2-q^2)\ln\frac{z-q}{z+q}\Big].$$

Это равенство показывает, что при возрастании $q$ разность $\sigma_{tr} - \sigma_{tr}^{(1)}$ стремится к нулю.

Из рис. 7 и 8 видно, что при больших значениях безразмерной частоты $x$ и при больших значениях $q$ кривые $1, 2, 3$ совпадают.

На рис. 9 и 10 представлены зависимости действительных и мнимых частей проводимости от безразмерной частоты $x$ при различных значениях параметра $q$.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выведена корректная формула для вычисления поперечной электрической проводимости в квантовой столкновительной плазме. Для этого используется кинетическое уравнение Вигнера — Власова — Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК–модели (Бхатнагар, Гросс и Крук) в координатном пространстве. Отдельно рассматривается случай вырожденной квантовой плазмы. Показано, что используемая до настоящего времени формула Линдхардта для вычисления поперечной проводимости некорректна.

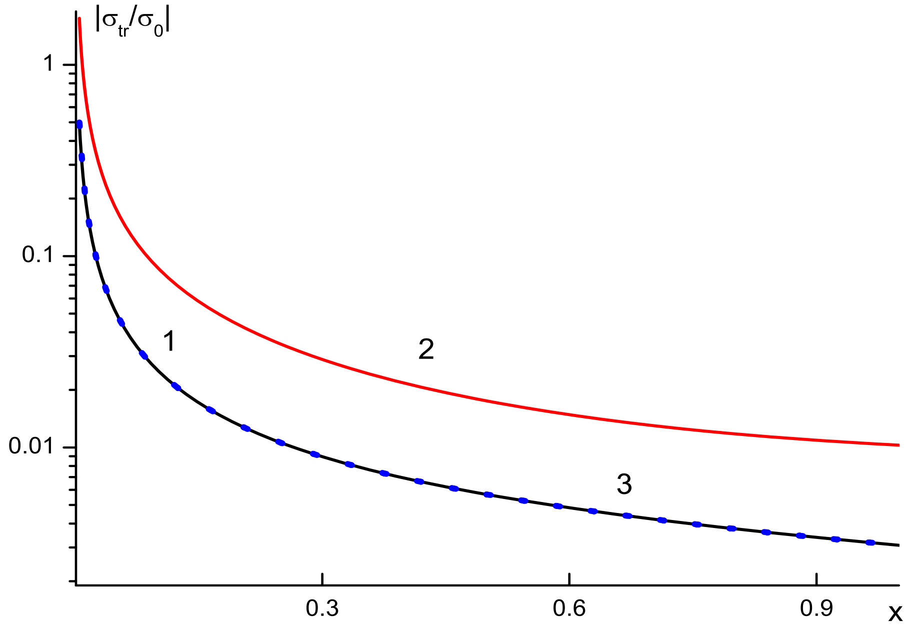


Рис. 1. Случай: $q = 2, y = 0.01$. Зависимость $|\sigma_2/\sigma_0|$ от $x$.

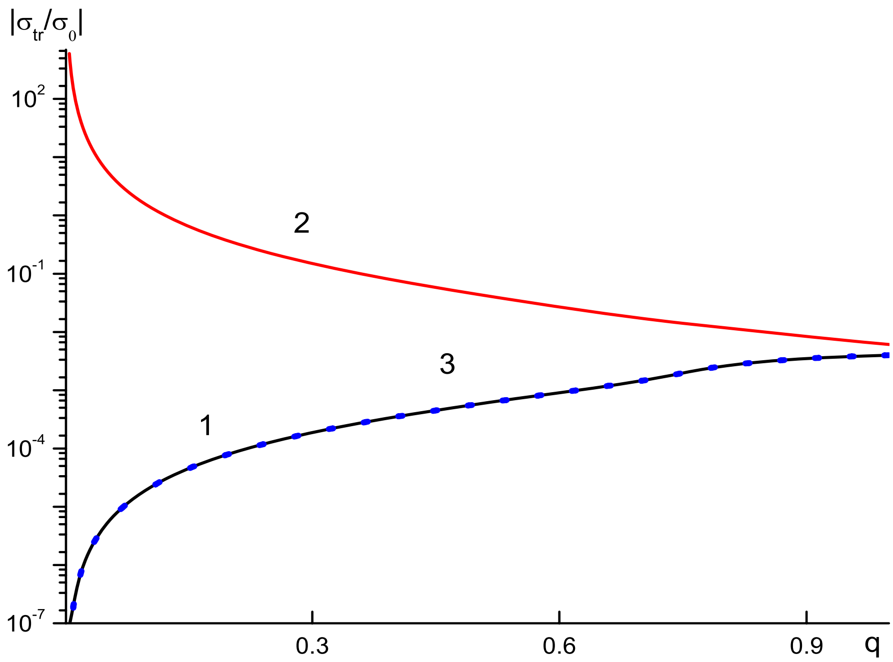


Рис. 2. Случай: $x = 1, y = 0.01$. Зависимость $|\sigma_2/\sigma_0|$ от безразмерного волнового числа $q$.

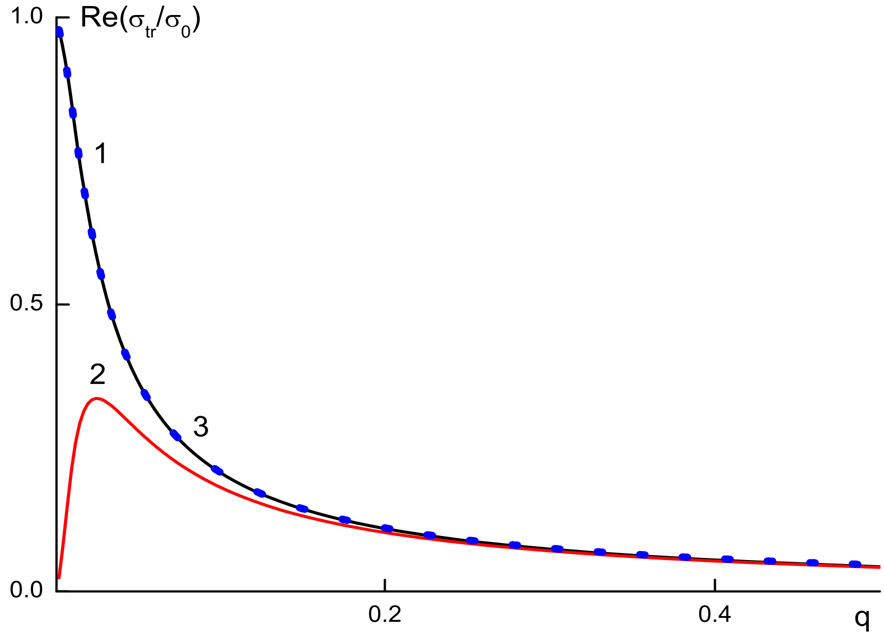


Рис. 3. Случай: $x = 0.001, y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $q$.

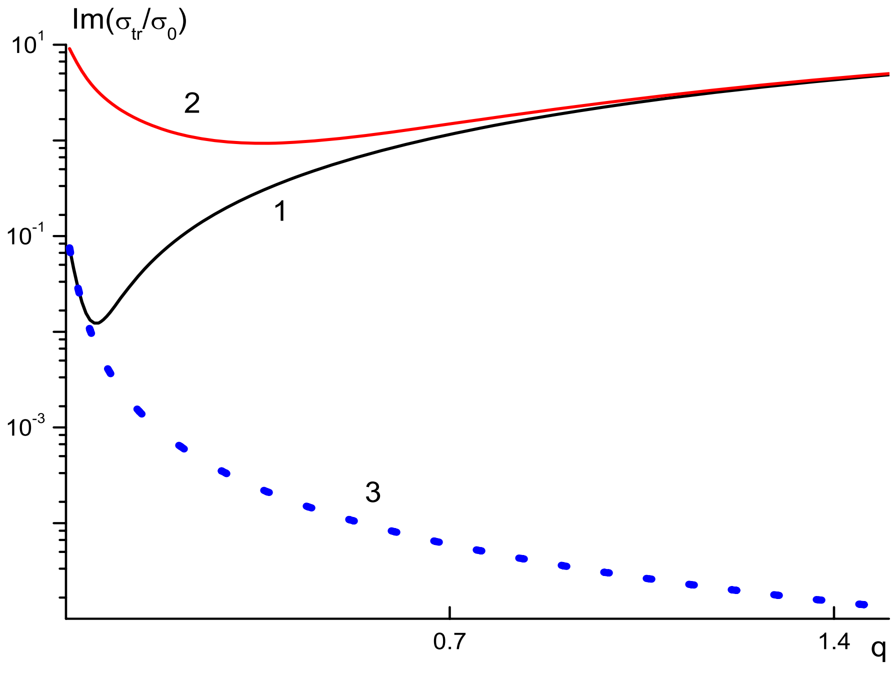


Рис. 4. Случай: $x = 0.001, y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Im}\,(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $q$.

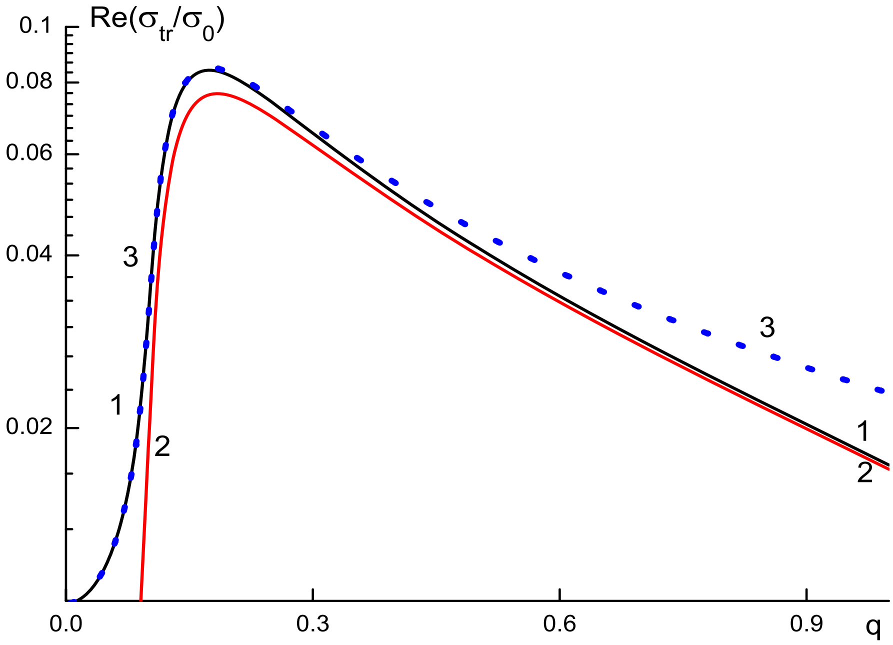


Рис. 5. Случай: $x = 0.1, y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $q$.

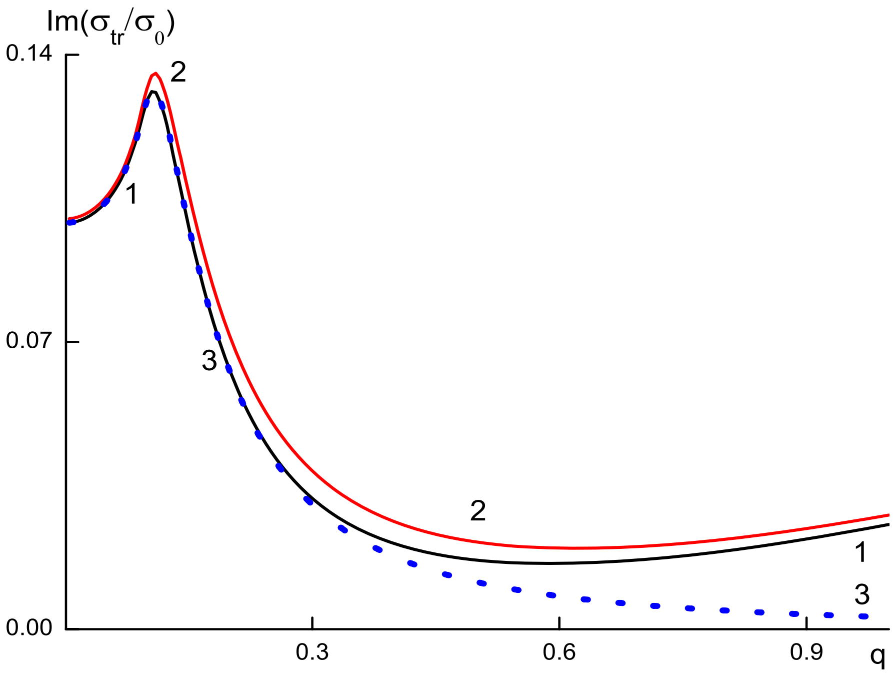


Рис. 6. Случай: $x = 0.1, y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Im}\,(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $q$.

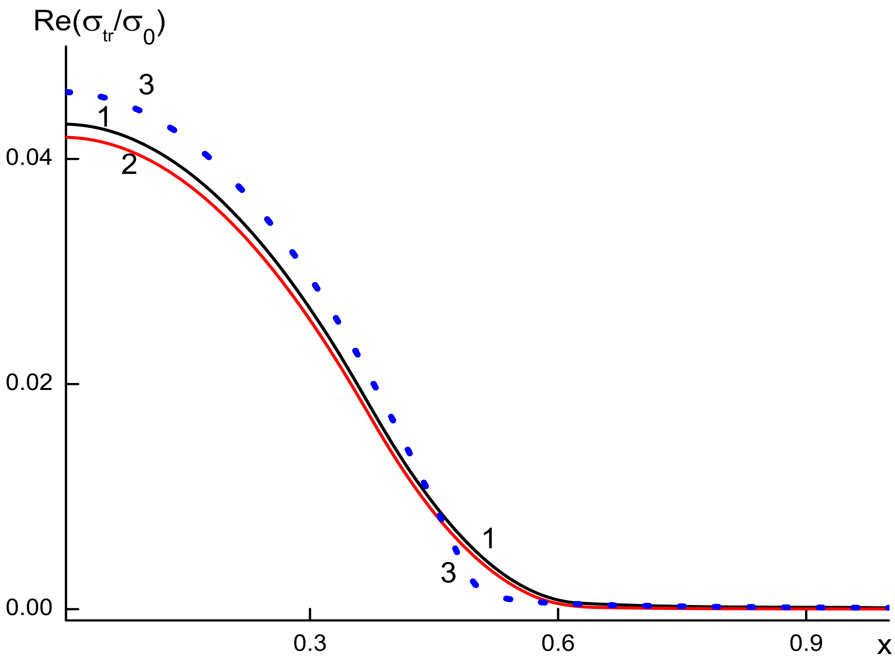


Рис. 7. Случай: $y = 0.01, q = 0.5$. Зависимость $\mathrm{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $x$.

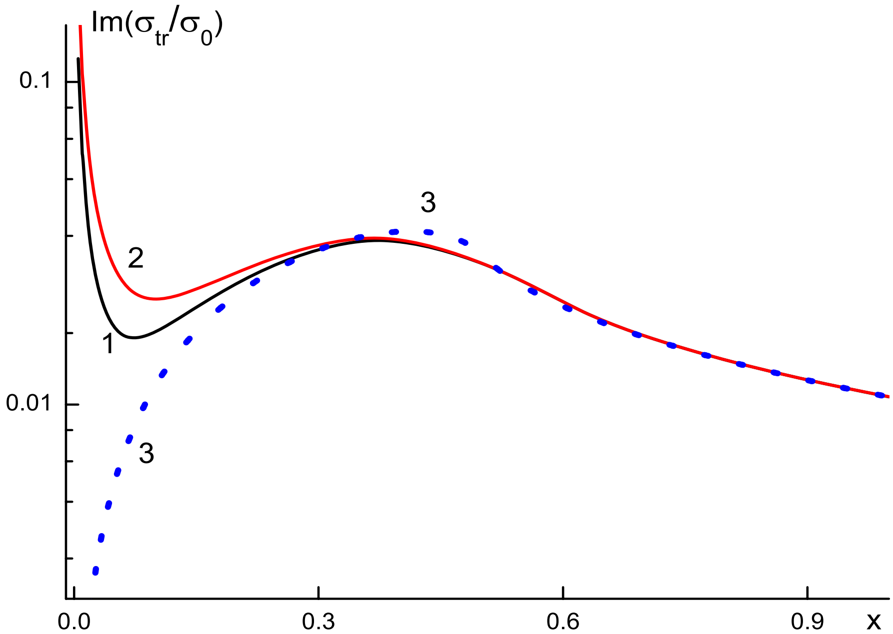


Рис. 8. Случай: $y = 0.01, q = 0.5$. Зависимость $\mathrm{Im}\,(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $x$.

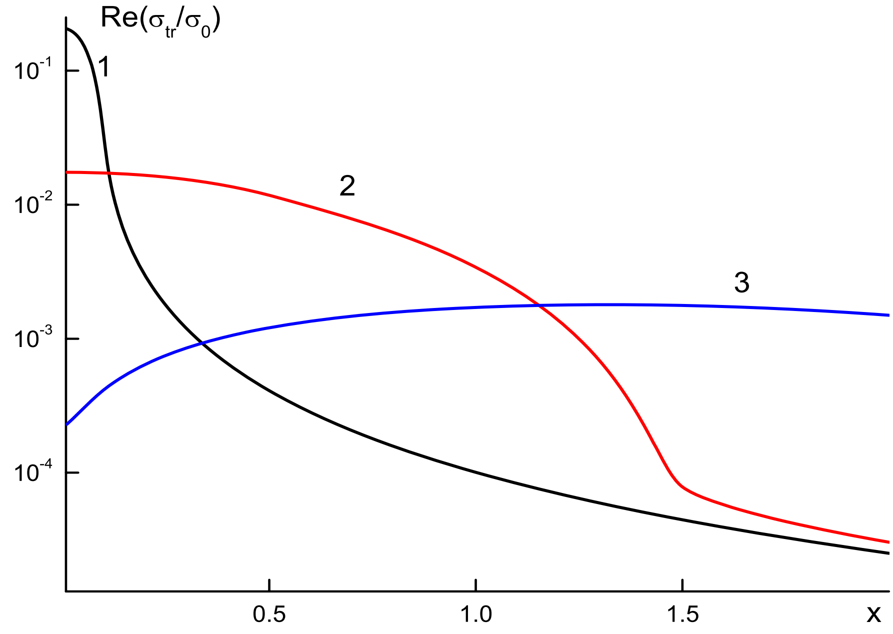


Рис. 9. Случай: $y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $x$.

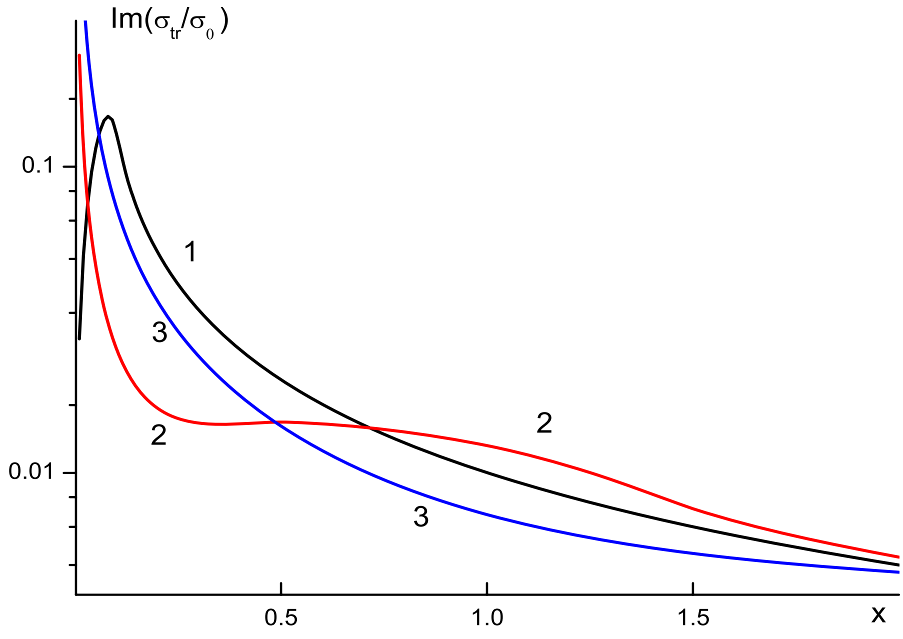


Рис. 10. Случай: $y = 0.01$. Зависимость $\mathrm{Im}\,(\sigma_{tr}/\sigma_0)$ от $x$.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. *Klimontovich Y.* The Spectra of Systems of Interacting Particles / *Klimontovich Y. and Silin V.P.* JETF (Journal Experimental Theoreticheskoi Fiziki), **23**, 151 (1952).
2. *Lindhard J.* On the properties of a gas of charged particles / *Lindhard J.* Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk–Fysiske Meddelelser. V. 28, №8 (1954), 1–57.
3. *Von Roos O.* Boltzmann — Vlasov Equation for a Quantum Plasma / *Von Roos O.* Phys. Rev. **119**. №4 (1960), 1174–1179.
4. *Kliewer K.L.* Lindhard Dielectric Functions with a Finite Electron Lifetime / *Kliewer K.L., Fuchs R.* Phys. Rev. 1969. V. 181. №2. P. 552–558.
5. *Mermin N. D.* Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation–Time Approximation / *Mermin N.D.* Phys. Rev. B. 1970. V. 1, №5. P. 2362–2363.
6. *Manfredi G.* How to model quantum plasmas / *Manfredi G.* ArXiv:quant-ph/0505004. 30 pp.
7. *Anderson D.* Statistical effects in the multistream model for quantum plasmas / *Anderson D., Hall B., Lisak M., and Marklund M.* Phys. Rev. E **65** (2002), 046417.
8. *De Andrés P.* Relaxation–time effects in the transverse dielectric function and the electromagnetic properties of metallic surfaces and small particles / *De Andrés P., Monreal R., and Flores F.* Phys. Rev. **B**. 1986. Vol. 34,№10, 7365–7366.
9. *Shukla P.K.* Nonlinear aspects of quantum plasma physics / Shukla P. K. and Eliasson B. Uspekhy Fiz. Nauk, **53**(1) 2010; [V. 180. No. 1, 55-82 (2010) (in Russian)].
10. *Eliasson B.* Dispersion properties of electrostatic oscillations in quantum plasmas / *Eliasson B. and Shukla P.K.* arXiv:0911.4594v1 [physics.plasm-ph] 24 Nov 2009, 9 pp.

11. *Bhatnagar P.L.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems / *Bhatnagar P.L., Gross E.P., and Krook M.* Phys. Rev. **94** (1954), 511–525.

12. *Opher M.* Krook collisional models of the kinetic susceptibility of plasmas / *Opher M., Morales G.J., Leboeuf J.N.* Phys. Rev. E. V. 66, 016407, 2002.

13. *Gelder van, A.P.*Quantum Corrections in the Theory of the Anomalous Skin Effect / *Gelder van, A.P.* Phys. Rev. 1969. Vol. 187. №3. P. 833–842.

14. *Fuchs R.* Surface plasmon in a semi–infinite free–electron gas / *Fuchs R., Kliewer K.L.* Phys. Rev. B. 1971. V. 3. №7. P. 2270–2278.

15. *Fuchs R.* Optical properties of an electron gas: further studies of a nonlocal description / *Fuchs R., Kliewer K.L.* Phys. Rev. 1969. V. 185. №3. P. 905–913.

16. *Dressel M.* Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter / *Dressel M., Grüner G.* Cambridge. Univ. Press. 2003. 487 p.

17. *Wierling A.* Interpolation between local field corrections and the Drude model by a generalized Mermin approach / *Wierling A.* arXiv:0812.3835v1 [physics.plasm-ph] 19 Dec 2008.

18. *Brodin G.* Quantum Plasma Effects in the Classical Regime / *Brodin G., Marklund M., Manfredi G.* Phys. Rev. Letters. **100**, (2008). P. 175001-1 – 175001-4.

19. *Manfredi G.* Self-consistent fluid model for a quantum electron gas / *Manfredi G. and Haas F.* Phys. Rev. B **64** (2001), 075316.

20. *Wigner E.P.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium / *Wigner E.P.* Phys. Rev. **40** (1932), 749–759.

21. *Tatarskii V.I.* The Wigner representation of quantum mechanics / *Tatarskii V.I.* Uspekhy Fiz. Nauk. **26** (1983), 311–327; [Usp. Fis. Nauk. **139** (1983), 587 (in Russian)].

22. *Hillery M.* Distribution functions in physics: Fundamentals / *Hillery M., O'Connell R.F., Scully M. O., and Wigner E.P.* Phys. Rev. **106** (1984), 121–167.

23. *Arnold A.* The 'electromagnetic' Wigner equation for an electron with spin / *Arnold A. and Steinrück H.* Z. Angew. Math. Phys. **40** (1989), 793–815.

24. *Kozlov V. V.* Vigner's function and diffusion in a collisionless medium of quantum particles / *Kozlov V.V. and Smolyanov O.G.* Teor. Veroyatn. Primen. **51** (2006), №1, 109–125 (In Russian); translation in Theory Probab. Appl. **51** (2007), №1, 168–181.