УДК 514.76/+512.54

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

© Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.

О ЛОКАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Аннотация. В настоящей статье выводятся необходимые и достаточные алгебраические условия, описывающие широкий класс локально инвариантных многообразий аффинной связности. Отдельно рассмотрены случаи локальной инвариантности аффинно – связного пространства относительно редуктивного и симметрического пространств.

Ключевые слова: аффинная связность, локальная инвариантность, редуктивное пространство, почти симметрическое пространство, квазигруппа.

© O. Matveyev, H. Nesterenko

ON LOCAL INVARIANT AFFINE CONNECTED SPACES

Abstract. In this paper the necessary and sufficient conditions for the wide class locally invariant affine connected manifolds are found. The cases of locally invariance of an affine connected space with respect to reductive and symmetric spaces are considered.

Key words: affine connection, locally invariance, reductive space, almost symmetric space, quasigroup.

Введение

Развитие геометрии от Эрлангенской программы Феликса Клейна и работ Софуса Ли, труды Эли Картана по симметрическим пространствам и теории связностей и, наконец, теория связностей в расслоениях выявили фундаментальную роль, которую играет понятие группы в геометрии. Современные исследования показывают, что не меньшее значение в геометрии имеют и неассоциативные алгебраические объекты, такие как квазигруппы, лупы, одуль, геоодулярные структуры [11], [12], [26], [27]. Гладкое локальное геоодулярное пространство есть точный алгебраический эквивалент многообразия аффинной связности. Систематическое построение теории геоодулярных пространств было произведено в школе профессора Л.В. Сабинина.

Симметрические пространства, введенные Эли Картаном [13], [14], обладают математически красивыми алгебраическими свойствами, геодезические симметрии относительно каждой точки являются локальными изоморфизмами аффинной связности. Известно [16], что локально симметрическое пространство может рассматриваться, как гладкая локально идемпотентная леводистрибутивная квазигруппа с «тождеством ключей». Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии. Позднее этот результат был обобщен. Произвольному пространству аффинной связности можно сопоставить однопараметрическое семейство локальных идемпотентных эластичных квазигрупп, определяемых каноническим (аффинным) параметром вдоль геодезических линий. Было введено новое понятие – пространство с геодезическими, как алгебра с однопараметрическим семейством бинарных операций, связанных определенными тождествами. Было установлено взаимно однозначное соответствие между гладкими многообразиями с геодезическими и аффинно связными многообразиями с нулевым тензором кручения. Таким образом, был построен алгебраический эквивалент экспоненциального отображения [17].

В конце прошлого и начале текущего столетия произошли качественные изменения в научном направлении «Нелинейной геометрической алгебры», возникшем на стыке дифференциальной геометрии и теории квазигрупп [1; 3; 6; 7; 9; 11; 12; 18-25].

В связи с проблемой характеризации аффинной связности, допускающей транзитивную группу аффинных преобразований, было введено понятие локальной инвариантности аффинной связности по отношению к другой аффинной связности. Было установлено, что однородность и инвариантность являются близкими терминами [2, 5, 8, 10].

В этой статье используются некоторые результаты теории геоодулярных пространств и многообразий аффинной связности [11; 12; 18; 26 27], в частности теорема об эквивалентности категории гладких многообразий аффинной связности и категории гладких локальных геоодулярных многообразий. С целью сокращения выкладок здесь мы рассмотрим лишь локальную инвариантность геоодулярного многообразия $\mathcal{M}$ относительно геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}}$ в случае, когда $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ имеют общие геодезические линии с сохранением канонического параметра.

Целью настоящего исследования является нахождение необходимых и достаточных алгебраических условий на геодезический одуль локально инвариантного геоодулярного пространства. Рассматриваемые тождества имеют локальный характер и выполняются, когда левая и правая их части одновременно имеют смысл.

Все геоодулярные многообразия рассматриваются над полем вещественных чисел.

Предварительные результаты

Определение 1. Пусть ∇ и $\overline{\nabla}$ – две аффинные связности, заданные на дифференцируемом многообразии M. Аффинная связность ∇ называется локально – инвариантной относительно аффинной связности $\overline{\nabla}$, если тензорные поля кривизны R и кручения T аффинной связности ∇, а так же их последовательные ковариантные дифференциалы $\nabla^e R$ и $\nabla^e T$, $I \le e < \infty$, параллельны относительно $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\nabla} R = 0, \quad \overline{\nabla} T = 0, \quad \overline{\nabla}\left(\nabla^e R\right) = 0, \quad \overline{\nabla}\left(\nabla^e T\right) = 0.$$

Молино (1964) получил следующий результат (см. также Кобаяси, Номидзу [15], т II. примечание 25).

Теорема 1. Если аналитическая аффинная связность ∇ на вещественном аналитическом многообразии M локально инвариантна относительно другой аффинной связности, то (M, ∇) локально изоморфно однородному пространству с некоторой инвариантной аффинной связностью.

Обобщая результаты Амброуза, Зингера [2] (1958), где выведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы полная риманова связность на односвязном многообразии допускала транзитивную группу преобразований, и, используя работы Кобаяси (1955), Номидзу [10] (1964), (см. также Кобаяси, Номидзу [15], т. II, гл. 10, §§1-2), Костант [5] (1960) вводит понятие жесткости аффинной связности относительно другой аффинной связности.

Определение 2. Пусть ∇ и $\overline{\nabla}$ – две аффинные связности на дифференцируемом многообразии M, и пусть S – тензорное поле на M типа (1, 2): $S(X,Y) = \overline{\nabla}_x Y - \nabla_x Y$, X, Y – дифференцируемые векторные поля на M. Аффинная связность ∇ называется жесткой относительно $\overline{\nabla}$, если S параллельно относительно $\overline{\nabla}$: $\overline{\nabla} S = 0$.

Костант получил следующие теоремы 2 и 3, характеризующие инвариантные аффинные связности на редуктивных однородных пространствах.

Теорема 2. Пусть ∇ - аффинная связность на односвязном многообразии M. Тогда М – редуктивное однородное пространство связной группы Ли с ∇ в качестве инвариантной аффинной связности в том и только том случае, когда существует аффинная связность $\overline{\nabla}$ на M такая, что:

(1) тензорные поля кривизны R и кручения T аффинной связности ∇ ковариантно постоянны относительно $\overline{\nabla}$: $\overline{\nabla} T = 0, \quad \overline{\nabla} R = 0;$

(2) ∇ жесткая относительно $\overline{\nabla}$;

(3) $\overline{\nabla}$ полная.

Теорема 3. Пусть ∇ – Аффинная связность на односвязном многообразии M Тогда M – редуктивное однородное пространство связной группы Ли с ∇ в качестве инвариантной аффинной связности в том и только в том случае, когда существует аффинная связность на M такая, что: (1) $\overline{\nabla}$ инвариантна при параллелизме; (2) ∇ жесткая относительно $\overline{\nabla}$; (3) $\overline{\nabla}$ полная.

Заметим, что из условий (1), (2) теоремы 2, так же как из условий (1), (2) теоремы 3 следует, в силу определения 1, что аффинная связность ∇ локально инвариантна относительно $\overline{\nabla}$, и результат Костанта есть важный специальный случай конструкции Молино.

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались Рашевским (1951), Куритой (1953), Винбергом (1959-1960)

Алгебраическое описание локально инвариантных пространств аффинной связности

Определение 1: Пусть $\mathcal{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R} >$ и $\overline{\mathcal{M}} =< M, \overline{L}, (\overline{\omega_t})_{t\in R} >$ – два C^k – гладких $(k \geq 0)$ локальных геоодулярных многообразия, имеющих общие геодезические линии с сохранением канонического параметра, т.е. $\overline{\omega_t} = \omega_t$. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно $\overline{\mathcal{M}}$, если левые сдвиги $\overline{L}_b^a \cdot a, b \in M$, геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}}$ являются локальными изоморфизмами геоодулярного многообразия $\mathcal{M}$, т. е. выполняется следующее соотношения (когда одновременно имеют смысл правые и левые части равенства):

$$\overline{L}_b^a \circ L_y^x = L_{\overline{L}_b^a y}^{L_b^a x} \circ \overline{L}_b^a, \tag{1}$$

$$\overline{L}_b^a (t_x y) = t_{\overline{L}_b^a x} \overline{L}_b^a y, \tag{2}$$

где $t_x y = \omega_t (x, y)$; $x, y \in M$.

Предложение 1: Пусть ∇ и $\overline{\nabla}$ – аффинные связности на вещественном аналитическом многообразии M, имеющие общие геодезические линии с сохранением канонического параметра, и ∇ – аналитична. Пусть $\mathcal{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R} >$ и $\overline{\mathcal{M}} =< M, \overline{L}, (\omega_t)_{t\in R} >$ –

локальные геоодулярные многообразия, соответствующие этим аффинным связностям. Тогда ∇ локально инвариантна относительно $\overline{\nabla}$, если и только если $\mathcal{M}$ локально инвариантна относительно $\overline{\mathcal{M}}$.

Доказательство: Аффинные связности ∇ и $\overline{\nabla}$, заданные на многообразии M имеют общие геодезические линии с сохранением канонического параметра тогда и только тогда, когда экспоненциальное отображение $Exp: T(M) \to M$ в (M, ∇) совпадает с экспоненциальным отображением $\overline{Exp}: T(M) \to M$ в $(M, \overline{\nabla})$: $Exp = \overline{Exp}$. Пусть аналитическая аффинная связность ∇ локально инвариантна относительно аффинной связности $\overline{\nabla}$. Тогда выполняются соотношения (1) и, следовательно, параллельный перенос $\overline{\tau}_b^a$ вдоль геодезической, соединяющей точки a и b, в $(M, \overline{\nabla})$ отображает тензоры $(\nabla^m T)_a$ и $(\nabla^m R)_a$ в тензоры $(\nabla^m T)_b$ и $(\nabla^m R)_b$ соответственно для $0 \le m < \infty$. Применяя теорему (7.2. гл. VI из [15], т.1), получаем, что $\overline{L}_b^a = Exp_b \circ \overline{\tau}_b^a \circ (Exp_a)^{-1}$ $(\overline{Exp} = Exp)$ есть локальный аффинный изоморфизм связности ∇, т. е. индуцированное отображение $(\overline{L}_b^a)_*: T(M) \to T(M)$ отображает каждое параллельное векторное поле вдоль каждой кривой γ в (M, ∇) в параллельное векторное поле в (M, ∇) вдоль кривой $L_b^a(\gamma)$ и, следовательно, $\overline{L}_b^a$ отображает каждую геодезическую в (M, ∇) в геодезическую в (M, ∇) вместе с ее каноническим параметром. Таким ообразом, имеем:

$$\overline{L}_b^a \circ Exp_x = Exp_{\overline{L}_b^a x} \circ \left(\overline{L}_b^a\right)_{*,x}; \quad \left(\overline{L}_b^a\right)_{*,y} \circ \tau_y^x = \tau_{\overline{L}_b^a y}^{\overline{L}_b^a x} \circ \left(\overline{L}_b^a\right)_{*,x};$$

$$\overline{L}_b^a\left(\omega_t(x,y)\right) = \overline{L}_b^a\left(Exp_x\left(t\left(Exp_x\right)^{-1} y\right)\right) = Exp_{\overline{L}_b^a x}\left(\left(\overline{L}_b^a\right)_{*,x}\left(t\left(Exp_x\right)^{-1} y\right)\right) =$$

$$Exp_{\overline{L}_b^a x}\left(t\left(Exp_{\overline{L}_b^a x}\right)^{-1}\left(\overline{L}_b^a y\right)\right) = \omega_t\left(\overline{L}_b^a x, \overline{L}_b^a y\right);$$

$$\overline{L}_b^a \circ L_y^x = \overline{L}_a^b \circ Exp_y \circ \tau_y^x \left(Exp_x\right)^{-1} = Exp_{\overline{L}_b^a y}\left(\overline{L}_b^a\right)_{*,y} \circ \tau_y^x \circ \left(Exp_x\right)^{-1}$$

Итак, из приведенных соотношений видно, что равенства (1) и (2) выполняются.

Обратно, пусть левые сдвиги $\overline{L}_b^a$ являются локальными изоморфизмами геоодулярного многообразия $\mathcal{M}$, а значит и локальными аффинными изоморфизмами связности ∇. Тогда отображение $\left(\overline{L}_a^b\right)_{*,a}$ переводит тензоры $(\nabla^m T)_a$ и $(\nabla^m R)_a$ в тензоры $(\nabla^m T)_b$ и $(\nabla^m R)_b$ соответственно для $0 \le m < \infty$. Поскольку $\left(\overline{L}_b^a\right)_{*,a} = \overline{\tau}_b^a$, то выполняется соотношения (1) и аффинная связность ∇ локально инвариантна относительно $\overline{\nabla}$.

Предложение 2: C^k – гладкое $(k \ge 0)$ локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M} = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ локально инвариантно относительно некоторого C^k – гладкого локального геоодулярного многообразия, имеющего общие геодезические с $\mathcal{M}$ с сохранением канонического параметра, тогда и только тогда, когда существует C^k – гладкое локальное отображение $\psi: M \times M \times M \to M$, $\psi(x, y, z) = \psi_y^x(z)$, такое, что для любого x из M $\psi_y^x : M \to M$ есть C^k – гладкий локальный диффеоморфизм, определенный на некоторой открытой окрестности U_x точки x при $y \in U_x$, и справедливы следующие соотношения:

$$\psi_y^x(y) = y \ , \tag{3}$$

$$\psi_y^x \circ t_x = t_x \circ \psi_y^x, \tag{4}$$

$$\psi_{t_x y} = L_y^x \circ \psi_{t_x y}^x \circ \left(\psi_y^x\right)^{-1} \circ \left(L_y^x\right)^{-1}, \tag{5}$$

$$L_z^y = L_y^x \circ \psi_y^x \circ L^x_{\left(\psi_y^x\right)^{-1}\left(L_y^x\right)^{-1} z} \circ \left(\psi_y^x\right)^{-1}\left(L_y^x\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$\bar{l}^x(y,z) \circ t_x = t_x \circ \bar{l}^x(y,z) \ , \tag{7}$$

$$\bar{l}^x(y,z) \circ L_w^x = L^x_{\bar{l}^x(y,z)w} \circ \bar{l}^x(y,z), \tag{8}$$

где $\bar{l}^x(y,z) = \left(\psi^x_{L_y^x \psi_y^x z}\right)^{-1} \circ \left(L^x_{L_y^x \psi_y^x z}\right)^{-1} \circ L_y^x \circ \psi_y^x \circ L_z^x \circ \psi_z^x, \quad x, y, z, w \in M, \quad t \in R$

Доказательство: Пусть C^k – гладкое локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M} =< M, L, (\omega_t)_{t \in R} >$ локально инвариантно относительно C^k – гладкого локального геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}} =< M, \bar{L}, (\omega_t)_{t \in R} >$, причем M и $\overline{\mathcal{M}}$ имеют общее геодезические линии с сохранением канонического параметра. Определим $\psi_y^x = \left(L_y^x\right)^{-1} \circ \bar{L}_y^x$, тогда $\psi_y^x(y) = \left(L_y^x\right)^{-1} \circ \bar{L}_y^x y = \left(L_y^x\right)^{-1} 2_x y = y$, и выполняется соотношение (3). Соотношения (4) и (5) следуют из тождеств геоодулярности в $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$. Поскольку $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно $\overline{\mathcal{M}}$, то, согласно соотношению (1), имеем: $L_z^y = \bar{L}_y^x \circ L^x_{\left(\bar{L}_y^x\right)^{-1} z} \circ \left(\bar{L}_y^x\right)^{-1}$, но $\bar{L}_y^x = L_y^x \circ \psi_y^x$ и, следовательно, выполняется соотношение (6). Легко видеть, что $\bar{l}^x(y,z) = \left(\bar{L}^x_{\bar{L}_y^x z}\right)^{-1} \circ \bar{L}_y^x \circ \bar{L}_z^x$, и, т. к. левые сдвиги $\bar{L}_y^x$ есть локальные изоморфизмы геоодулярного многообразия $\mathcal{M}$, то и $\bar{l}^x(y,z)$ есть также локальный изоморфизм $\mathcal{M}$, и справедливы соотношения (7) и (8).

Обратно, пусть для C^k – гладкого локального геоодулярного многообразия $\mathcal{M}$, существует C^k – гладкое локальное отображение $\psi : M \times M \times M \to M$, $\psi(x,y,z) = \psi_y^x(z)$, такое, что $\psi_y^x : M \to M$ есть C^k – гладкий локальный диффеоморфизм, определенный на некоторой открытой окрестности U_x точки x при $y \in U_x$, удовлетворяющий соотношениям (3) – (8). Определим $\bar{L}_y^x = L_y^x \circ \psi_y^x$, тогда из соотношений (3) – (5) следует, что $\overline{\mathcal{M}} =< M, \bar{L}, (\omega_t)_{t \in R} >$ есть C^k – гладкое локальное геоодулярное многообразие, имеющее общие геодезические линии с $\mathcal{M}$ с сохранением канонического параметра. Тождества (1) и (2) легко выводятся из соотношений (6) – (8), поэтому $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно $\overline{\mathcal{M}}$.

Предложение 3: C^k – гладкий $(k \ge 0)$ локальный левый одуль $\mathcal{M}_e =< M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e >$ с нейтралом e может быть включен в качестве геодезического одуля в точке e в C^k – гладкое локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M}$, определенное на некоторой окрестности нейтрала e, локально инвариантно относительно C^k – гладкого локального редуктивного геоодулярного многообразия, имеющего общие геодезические с $\mathcal{M}$ с сохранением канонического параметра тогда и только тогда, когда существует C^k – гладкое локальное отображение $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x,y) = \varphi_x(y)$ такое, что для любого x $\varphi_x : M \to M$ есть C^k – гладкий локальный диффеоморфизм, определенный на некоторой открытой окрестности U_e нейтрала e при $x \in U_e$, и справедливы следующие соотношения:

$$\varphi_e(x) = x \ , \tag{9}$$

$$\varphi_x \circ t_e = t_e \circ \varphi_x, \tag{10}$$

$$\varphi_x(x) = x, \tag{11}$$

$$\varphi_{(t+u)_e x} = \varphi_{t_e x} \circ \varphi_{u_e x} \ , \tag{12}$$

$$L^e_{t_e x} \circ \varphi_x = L^e_x \circ \varphi_x \circ L^e_{(t-1)_e x}, \tag{13}$$

$$\bar{l}^e(x,y) \circ t_e = t_e \circ \bar{l}^e(x,y), \tag{14}$$

$$\bar{l}^e(x,y) \circ L^e_z = L^e_{\bar{l}^e(x,y)z} \circ \bar{l}^e(x,y), \tag{15}$$

$$\bar{l}^e(x,y) \circ \varphi_z = \varphi_{\bar{l}^e(x,y)z} \circ \bar{l}^e(x,y), \tag{16}$$

где $\bar{l}^e(x,y) = \left(\varphi_{L^e_x \varphi_x(y)}\right)^{-1} \circ \left(L^e_{L^e_x \varphi_x(y)}\right)^{-1} \circ L^e_x \circ \varphi_x \circ L^e_y \circ \varphi_y$, где L^e_x – левые сдвиги лупы одуля $\mathcal{M}_e$, $x \mapsto t_e x$ – умножение на скаляры, x, y, z, w принадлежат некоторой открытой окрестности нейтрала e, $t, u \in R$.

Доказательство: Пусть C^k – гладкий локальный одуль $\mathcal{M}_e$ включен в качестве геодезического одуля в точке e в C^k – гладкое локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M} = < V, L, (\omega_t)_{t \in R} >$, определенное на некоторой открытой окрестности V нейтрала e, причем $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно C^k – гладкого локального редуктивного геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}} = < V, \bar{L}, (\omega_t)_{t \in R} >$, определим $\varphi_x = \left(L^e_x\right)^{-1} \circ \bar{L}^e_x$. Применяя предложение 2, убеждаемся в справедливости соотношений (9) – (11), (14), (15). Поскольку $\overline{\mathcal{M}}$ – локально редуктивно, то $\bar{l}^e_{(x,y)} \circ \bar{L}^e_z = \bar{L}^e_{\bar{l}^e(x,y)z} \circ \bar{l}^e(x,y)$, и, в силу соотношения (15), выполняется равенство (16). Подставляя в первое тождество геоодулярности в $\mathcal{M}$ $L^x_{t_e} \circ L^e_x = L^e_{t_e x}$ выражение $L^x_{t_e x} = L^e_x \circ \varphi_x \circ L^e_{(\varphi_x)^{-1}\left(L^e_x\right)^{-1} t_e x} (\varphi_x)^{-1} \left(L^e_x\right)^{-1}$, имеющее место в силу (6), приходим к соотношению (13). Легко проверяется, что тождество левой моноальтернативности $\bar{L}^e_{u_e x} \circ \bar{L}^e_{t_e x} = \bar{L}^e_{(u+t)_e x}$ в силу соотношения (13) равносильно равенству (12).

Обратно, если для локального одуля $\mathcal{M}_e$ определены C^k – гладкие локальные диффеоморфизмы $\varphi_x : M \to M$, удовлетворяющие соотношениям (39) – (16), то определим $\bar{L}^e_x = L^e_x \circ \varphi_x$, $\bar{L}^x_y = \bar{L}^e_x \circ \bar{L}^e_{\left(\bar{L}^e_x\right)^{-1} y} \bar{L}^e_x$, $t_x = \bar{L}^e_x \circ t_e \cdot \left(\bar{L}^e_x\right)^{-1}$, как показывает непосредственная проверка, $\overline{\mathcal{M}} = < V, \bar{L}, (\omega_t)_{t \in R} >$ есть C^k – гладкое локально редуктивное геоодулярное многообразие, определенное на некоторой открытой окрестности V нейтрала e. Далее определим $L_y^x = \overline{L}_x^e \circ L^e_{\left(\overline{L}_x^e\right)^{-1} y} \circ \left(\overline{L}_x^e\right)^{-1}$, тогда $\mathcal{M} = < V, L, (\omega_t)_{t\in R} >$ есть C^k – гладкое локальное геоодулярное многообразие локально инвариантное относительно $\overline{\mathcal{M}}$.

Определение 2: C^k – гладкое $(k \geq 0)$ локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M} = \langle$ M, L, $(\omega_t)_{t\in R} >$ называется почти симметрическим, если выполняются следующие два условия:

(а) для любых $a, b \in M$ композиция двух геодезических симметрий $(-1)_b \circ (-1)_a$ есть локальный изоморфизм $\mathcal{M}$;

(б) справедливо тождество:

$$(-1)_a \circ (-1)_{t_a b} = (-1)_{t_b a} \circ (-1)_b \ . \tag{17}$$

Замечание: Используя результаты, изложенные в [16], можно показать, что при $k = \infty$ из условия (а) следует условие (б).

Предложение 4: C^k – гладкое $(k \geq 0)$ локальное геоодулярное многообразие $\mathcal{M}$ является почти симметрическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно локально симметрического геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}}$, имеющего общие геодезические с $\mathcal{M}$ с сохранением канонического параметра.

Доказательство: Пусть $\mathcal{M} = < V, L, (\omega_t)_{t\in R} >$ – C^k гладкое локальное почти симметрическое геоодулярное многообразие. Определим $\overline{L}_b^a = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_a b} \circ (-1)_a$. Тогда в силу определения 2 справедливы соотношения (1) и (2) и непосредственно проверяется, что $\overline{\mathcal{M}} = < V, \overline{L}, (\omega_t)_{t\in R} >$ – C^k – гладкое локальное симметрическое геоодулярное многообразие. Обратно, если $\mathcal{M}$ локально инвариантно относительно локально симметрического геоодулярного многообразия $\overline{\mathcal{M}}$, имеющего общие геодезические с $\mathcal{M}$ с сохранением канонического параметра, то, поскольку левый сдвиг в $\overline{\mathcal{M}}$ есть композиция двух геодезических симметрий, и в $\overline{\mathcal{M}}$ выполняется тождество (17) (как следствие первого тождества геоодулярности и локальной симметричности), то по определению 2. $\mathcal{M}$ – почти симметрическое.

Предложение 5: C^k – гладкий $(k \geq 0)$ локальный левый одуль $\mathcal{M}_e = < M, L^e, \{t_e\}_{t\in R} e >$ с нейтралом e может быть включен в качестве геодезического одуля в точке e в C^k – гладкое локальное почти симметрическое геоодулярное многообразие тогда и только тогда, когда выполняется следующие тождества:

$$\varphi_{(t+u)_e x} = \varphi_{t_e x} \circ \varphi_{u_e x}, \tag{18}$$

$$L^e_{t_e x} \circ \varphi_x = L^e_x \circ \varphi_x \circ L^e_{(t-1)_e x}, \tag{19}$$

$$\bar{l}^e(x, y) \circ t_e = t_e \circ \bar{l}^e(x, y), \tag{20}$$

$$\bar{l}^e(x, y) \circ L^e_z = L^e_{\bar{l}^e(x,y) z} \circ \bar{l}^e(x, y), \tag{21}$$

где

$$\varphi_x = \left(L^e_x\right)^{-1} S^e_x, \quad S^e_x = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e = L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} (-1)_e \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}\right)^{-1} (-1)_e, \quad \bar{l}^e_{(x,y)} = \left(S^e_{S^e_x y}\right)^{-1} \circ S^e_x \circ S^e_y .$$

Доказательство: Предложение 5 непосредственно следует из предложений 4 и 3, поскольку в локально симметрическом геоодулярном многообразии левые сдвиги S_x^e геодезического одуля выражаются через геодезические симметрии: $S_x^e = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Local algebras of a differential quasigroup. //Bulletin of the American mathematical society. – V. 43, 2, 2006, p.p. 207-226.
2. *Ambrose W., Singer I.M.* On homogenious Riemannian manifolds. //Duke Math. J. – 1958. – V. 25. – P.p. 647-669.
3. *Figula Agota* Geodesic loops. //Journal of Lie theory. – V. 10. – 2000. – p.p.455-461.
4. *Hitotsuyanagi N.* Manifolds with a triple multiplication. //Math. Japonica. – № 2. – 1997. – P.p. 345-353.
5. *Kostant B.* A characterization of invariant affine connections. //Nagoya Math. J. – 1960. – V. 16. – p.p.35-50.
6. *Matveyev O.A., Nesterenko E.L.* On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. – Werbs & quasigroups. – Tver. – 2002. – pp. 78-84 /English/.
7. *Matveyev O.A., Nesterenko E.L.* The Real Prosymmetric Spaces. //Non-Associative Algebra and its applications. A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. – V. 246. – Chapter 19. – Champan &Hall/CRC 2006 USA.
8. *Molino P.* Champs d`elements sur un espace fibre principal differentiable. – Ann.Iust.Fourier (Grenoble). – 1964. – 14. – P.p.163-219.
9. *Nagy Peter T., Strambach K.* Loops in Group Theory and Lie Theory. -Walter de Gruyter. – Berlin-New York. – 2002. – 458 p.
10. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces //American J. Math. – 1964. – 76. – P.p. 33-65.
11. *Sabinin L.V.* Non-Associative Algebra and its applications. //A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. – V. – Chapter 19. – Champan &Hall /CRC . – 2006 . – USA/.
12. *Sabinin L.V., Matveev O.A.* Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds. (Survey on odular geometry). //Вестник РУДН. – 2(1). – 1995. – С. 135-243.
13. *Картан Эли.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. //Сборник работ. – М.: ИЛ.? – 1949. – 384 с.
14. *Картан Эли.* Геометрия римановых пространств. – М.-Л. ОНТИ. – 1936. – 244 с.
15. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – Т.1 – 2 – М.: Наука. – 1981.
16. *Лоос. О.* Симметрические пространства. – М.: Наука. – 1985. – 208 с.
17. *Матвеев О.А.* О многообразиях с геодезическими. //Ткани и квазигруппы. – Калинин: КГУ. -1986. – С. 44-49.
18. *Матвеев О.А.* О пространствах аффинной связности, близких к симметричным. // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сб-к. – Пенза. – 1992.
19. *Матвеев О.А, Нестеренко Е.Л.* О двусторонних пространствах аффинной связности. //Материалы международной научно-практической конференции «Л.Эйлер и Российское образование, наука и культура». – г. Тула. – 2-5 мая 2007г. – С. 207.
20. *Матвеев О.А, Нестеренко Е.Л.* Алгебраические и геометрические свойства просимметрических пространств. //XXXVI Всероссийская научная конференция по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания

естественнонаучных дисциплин. – Тезисы докладов. – Математические секции. – М.: Изд-во РУДН. – 2000. – С.6.

21. *Матвеев О.А, Нестеренко Е.Л.* О теории редуктивных проабелевых пространств. //Труды кафедры геометрии Московского Государственного областного университета № 2. – Сборник научно-методических работ. – Москва: Издательство МГОУ. – 2005. – С.32-36.

22. *Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.* Просимметрические пространства. //Вестник РУДН. – Серия Математика. – 7(1). – 2000. – С. 114-126.

23. *Нестеренко Е.Л.* Алгебраические свойства аффинной связности на касательном расслоении. //Фундаментальные проблемы Физики и математики. – Москва. – Государственный Технологический Университет «СТАНКИН». – Институт математического моделирования РАН. – 2004.– С. 31-45.

24. *Нестеренко Е.Л.* Редуктивные проабелевы пространства. //Актуальные проблемы математики и методики преподавания. – Пензенский университет. – 2001. – С. 76-78.

25. *Нестеренко Е.Л.* Свойства просимметрических пространств. //Тезисы научных докладов Международной научно-практической конференции «Народное образование в XXI веке», посвященной 70-летию МПУ. – М.: Изд-во МПУ «Народный учитель». – 2001. – С. 43.

26. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью. – ДАН СССР. – 1977. – 233. – №5. – С.800-803.

27. *Сабинин Л.В.* Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. / Добавление к книге Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – Т.1. – М.: Наука, – 1981. – С. 291-339.