ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 514.76+512.54

© Е.Л. Нестеренко

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С ОБОБЩЕННЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ МУФАНГ

Аннотация. В настоящей работе вводятся в рассмотрение двусторонние многообразия аффинной связности, дается их алгебраическое описание, выводятся некоторые необходимые дифференциально – геометрические тождества, имеющие место в данном классе пространств. Рассмотрены двусторонние пространства нулевой кривизны, доказывается, что лупы Муфанг и только они являются геодезическими лупами гладких двусторонних пространств нулевой кривизны. Получено точное алгебраическое описание широкого класса пространств аффинной связности, представляющих определенный научный интерес.

Ключевые слова: геодезические лупы, лупы Муфанг, двусторонние многообразия аффинной связности.

© H. Nesterenko

AFFINELY CONNECTED SPACES WITH GENERALIZED ALGEBRAIC MOUFANG PROPERTY

Abstract. In this paper twolateral manifolds of affine connection are introduced, the algebraic description is given, some differential identities of this class of spaces are obtained. Twolateral manifolds of affine connection of zero curvature are discussed, it is proved that Moufang loops, and only them, are geodesic loops of smooth twolateral zero curvature spaces. The precise algebraic description of wide class of affinely connected spaces is obtained. These spaces are of definite scientific interest.

Key words: geodesic loops, Moufang loops, affinely connected spaces.

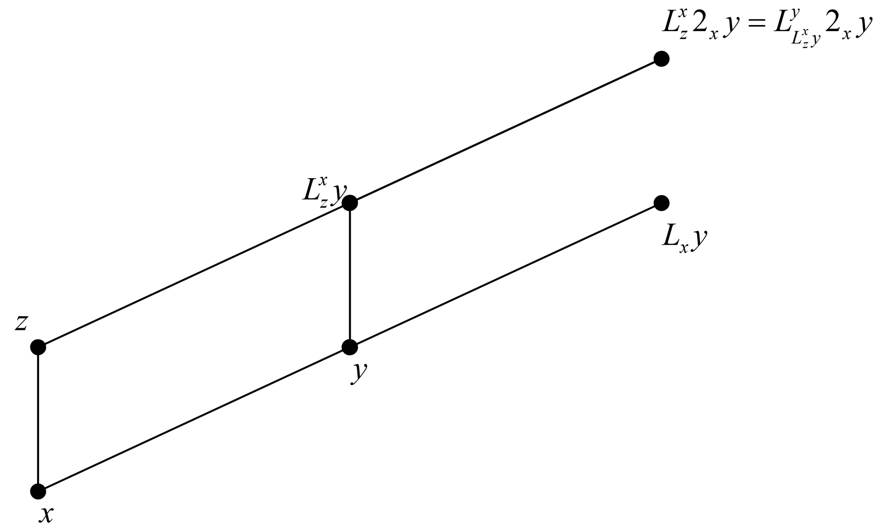
Пусть $\mathscr{M} = < M, L, (\omega_t)_{t \in R} >$ - вещественная левая геоодулярная структура (см. [I]; [2] с. 301, [3]. В работе [4] обсуждается понятие геодезической лупы пространства аффинной связности.) Будем предполагать в дальнейшем, что для любой точки e $< M, L^e, e >$ есть не только левая, но и правая лупа. Заметим, что в гладком случае это допущение всегда выполняется. Положим $\overline{L}^e_x y = L^e_y x$ для любых e , x , y из M. Тогда, как легко видеть, для любой точки e $< M, L^e, te >$ есть одуль над полем вещественных чисел.

Определение: Вещественную левую геоодулярную структуру $\mathscr{M} = < M, L, (\omega_t)_{t \in R} >$ будем называть двусторонней, если $\overline{\mathscr{M}} = < M, \overline{L}, (\omega_t)_{t \in R} >$ есть вещественная левая геоодулярная структура.

Предложение I: Левая геоодулярная структура $\mathscr{M} = < M, L, (\omega_t)_{t \in R} >$ является двусторонней тогда, и только тогда, когда выполняется тождества:

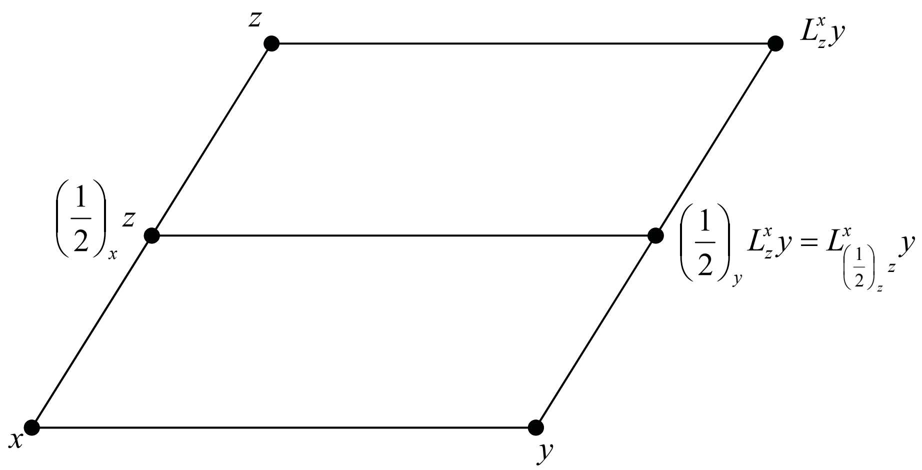
$$L^y_{L^x_z y} t_x y = L^x_z t_x y \quad . \tag{1}$$

Можно проиллюстрировать это тождество, рассмотрев частный случай:



$$L^x_{t_x z} y = t_y L^x_z y \qquad (2)$$

при $t = \dfrac{1}{2}$



Доказательство: Тождества (1) и (2) равносильны соответственно первому и второму тождествам геоодулярности в $\overline{\mathscr{M}} =< M, \overline{L}, (\omega_t)_{t\in R} >$.

Следующее предложение описывает двусторонние геоодулярные структуры на языке одулей с элементарными голономиями (k– одулей)

Предложение 2: Пусть $\mathscr{M}_e =< M, L, t, e >$ - двусторонний одуль, и для любых $x, y \in M$ определены биекции $h(x, y): M \to M$, удовлетворяющие следующим тождествам:

$$h(e, x)y = y \;, \qquad (3)$$

$$h(x,y)tz = th(x,y)z \ , \tag{4}$$

$$h(L_x b, L_z h(x,z)b)l(x,b)b = l(z,h(x,z)b)h(x,z)b \ , \tag{5}$$

$$L^{-1}_{L_x a} L_{L_x tb} h(x, L_x tb)a = tL^{-1}_{L_x a} L_{L_x b} h(x, L_x b)a \ . \tag{6}$$

где $l(x,y)z = L_{L_x y} L_x L_y z$

Тогда $< M, L, t, e, h >$ может быть включен в качестве геодезического h - одуля в двустороннюю геоодулярную структуру. Обратно, любой геодезический h - одуль двусторонней геоодулярной структуры удовлетворяет тождествам (3) – (6).

Из предложения 2 следует

Предложение3: Двусторонний одуль $\mathscr{M}_e =< M, L, t, e >$ может быть включен в качестве геодезического одуля в двустороннюю геоодулярную структуру нулевой кривизны тогда и только тогда, когда выполняются тождества:

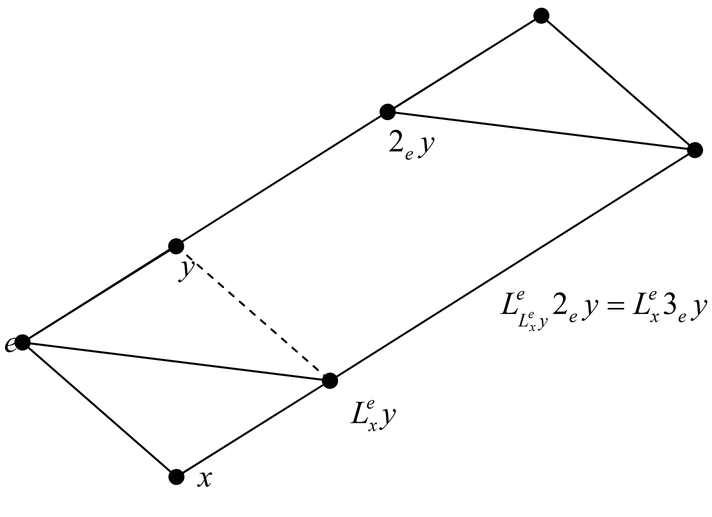
$$l^e(x,y)u_e y = u_e y \ , \tag{7}$$

$$l^e(x,y) = \left(L^e_{L^e_x y}\right)^{-1} L^e_x \ L^e_y \ ,$$

$$L^e_x \ L^e_y \ u_e y = L^e_{L^e_x} u_e y \ ,$$

$$L^e_x (u+1)_e = L^e_{L^e_x y} u_e y \ .$$

Положим: $u = 2$



$$\left(L^e_{L^e_x a}\right)^{-1} L^e_{L^e_x t_e b} a = t_e \left(L^e_{L^e_x}\right)^{-1} L^e_{L^e_x b} a \ . \tag{8}$$

Примечание: $\left(L^e_{L^l_x}\right)^{-1} = L_e^{\,L^l_x a}$

Очевидно, что групповая связность Э. Картана ([5]) является двусторонней геоодулярной структурой нулевой кривизны. Используя бинарную лиевость лупы Муфанг, нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 4: Пусть одуль $\mathscr{M}_e =< M, L, t, e >$ такой, что $< M, L, e >$ - лупа Муфанг. Тогда $\mathscr{M}_e$ может быть включен в качестве геодезического одуля в двустороннюю геоодулярную структуру нулевой кривизны.

Согласно предложению 4 мы приходим к геоодулярной структуре, вообще говоря, нулевой кривизны, каждая геодезическая лупа которой есть лупа Муфанг.

Предложение 5: Пусть $\mathscr{M}_e =< M, L, t, e >$ - одуль Муфанг.
положим $h(x, L_y x) = l(y, x)$, определим операции L^a и t_a следующими формулами:

$$L_b^a = L_b h(a,b) L_a^{-1} \ ,$$

$$t_a = L_e t L_a^{-1} \ .$$

Тогда $\mathscr{M} =< M, \left(L^a\right)_{a\in M}, \left(\omega_t\right)_{t\in R} >$ - есть двусторонняя геоодулярная структура, каждая геодезическая лупа которой есть лупа Муфанг и выполняется тождество:

$$h^a\left(x, L_y^a x\right) = l^a\left(y, x\right) \ . \tag{9}$$

Теперь приступим к выводу необходимых дифференциально – геометрических тождеств, описывающих гладкие двусторонние геоодулярные многообразия.

Предложение 6: В многообразии линейной связности (M, ∇), соответствующем гладкому двустороннему геоодулярному многообразию $\mathscr{M} =< M, L, \left(\omega_t\right)_{t\in R} >$ выполняются тождества

$$R(X,Y)Z = R(Y,Z)X \ , \tag{10}$$

$$\nabla_z T(X,Y) = \nabla_x T(Y,Z) \ , \tag{11}$$

где *R,T* - соответственно тензоры кривизны и кручения, *X,Y,Z* – гладкие векторные поля.

Доказательство: В работе [4] вычислено разложение операции геодезической лупы $< L^e, e >$ в нормальной системе координат с центром в точке e с точностью до малых третьего порядка:

$$\left(L_a^e b\right)^i = b^i + a^i + T_{jk}^i b^j a^k - \frac{1}{2}\left(\Gamma_{kj,e}^i - T_{\alpha k}^i T_{je}^\alpha\right) b^j a^k a^e - \frac{1}{2}\Gamma_{kj,e}^j b^j b^k a^e + o\left(\rho^3\right) \ , \tag{12}$$

$\rho = \max\{|a^i|, |b^i|\}$, $\{T_{jk}^i\}$ - компоненты тензора кручения в точке e, $\Gamma_{kj,e}^i = \frac{\partial}{\partial x^e}\left[\Gamma_{kj}^i(x)\right]_{x=e}, \{\Gamma_{kj}^i\}$ - компоненты линейной связности ∇.

Аналогично, для операции $\overline{L_a^e} b = L_b^e a$ имеем:

$$\left(\overline{L_b^e} a\right)^i = a^i + b^i + \overline{T_{jk}^i} a^i b^k - \frac{1}{2}\left(\overline{\Gamma}_{kj,e}^i - \overline{T}_{\alpha k}^i \overline{T}_{je}^\alpha\right) a^j b^k b^e - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{kj,e}^i a^j a^k b^e + o\left(\rho^3\right), \ , \tag{13}$$

где $\left\{\overline{T}^{i}_{jk}\right\}$ - компоненты тензора кручения $\overline{T}$ аффинной связности $\overline{\nabla}$, соответствующей геоодулярному многообразию $\mathscr{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R} >$, $\overline{\Gamma}^{i}_{kj,e} = \dfrac{\partial}{\partial x^e}\left[\overline{\Gamma}^{i}_{kj}(x)\right]_{x=e}, \left\{\overline{\Gamma}^{i}_{kj}\right\}$ - компоненты линейной связности $\overline{\nabla}$. Т.к. $L^e_a b = \overline{L}^e_b a$, то из равенств (12) и (13) имеем

$$\overline{T}^{i}_{jk} = -T^{i}_{jk} \ , \tag{14}$$

и, следовательно, т.к. $\Gamma^i_{(jk)} = \overline{\Gamma}^i_{(jk)}$, поскольку (M,∇) и $(M,\overline{\nabla})$ имеют общие геодезические линии, получаем:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - T^i_{jk} \ . \tag{15}$$

Принимая во внимание равенство (15), из соотношений (12) и (13) имеем:

$$\Gamma^{i}_{kj,e} + \Gamma^{i}_{ej,k} - T^{i}_{\alpha k}T^{\alpha}_{je} - T^{i}_{\alpha e}T^{\alpha}_{jk} = \Gamma^{i}_{ke,j} + \Gamma^{i}_{ek,j}, \tag{16}$$

$$\Gamma^{i}_{ke,j} + \Gamma^{i}_{ek,j} = \Gamma^{i}_{kj,e} + \Gamma^{i}_{ej,k} - T^{i}_{kj,e} - T^{i}_{ej,k} - T^{i}_{\alpha k}T^{\alpha}_{je} - T^{i}_{\alpha e}T^{\alpha}_{jk} \tag{17}$$

Складывая соотношения (16) и (17), и приводя подобные члены, немедленно получаем

$$T^i_{kj,e} + T^i_{ej,k} = 0 \ .$$

В силу нормальности системы координат легко проверить, что

$$\nabla_e T^i_{kj,e} + \nabla_k T^i_{ej} = T^i_{kj,e} + T^i_{ej,k} \ .$$

Т.о., мы доказали, что $\nabla_e T^i_{kj,e} + \nabla_k T^i_{ej} = 0$, и, следовательно, имеет место тождество(11).

Учитывая, что компоненты тензора кривизны в нормальных координатах вычисляются по формуле

$$R^i_{mk,e}(e) = \Gamma^i_{me,k} - \Gamma^i_{ke,m} + T^i_{kp}T^p_{me} - T^i_{mp}T^p_{ke} \ ,$$

подставляем в равенство (16) следующие соотношения:

$$\Gamma^i_{ke,j} = \Gamma^i_{je,k} - T^i_{jp}T^p_{ke} + T^i_{kp}T^p_{je} + R^i_{kj,e}$$

$$\Gamma^i_{ek,j} = \Gamma^i_{jk,e} - T^i_{jp}T^p_{ek} + T^i_{ep}T^p_{jk} + R^i_{ej,k}$$

После очевидных сокращений имеем

$$R^i_{kj,e} + R^i_{ej,k} = 0 \ . \tag{18}$$

Тождество (10) есть инвариантная запись тождества (18).

Предложение 7: Лупы Муфанг, и только они, являются геодезическими лупами двусторонних геоодулярных многообразий нулевой кривизны.

Доказательство: Известно ([3] с. 62), что локальным аналитическим лупам Муфанг соответствует многообразия аффинной связности, удовлетворяющие условиям:

$$R(X,Y)Z=0, \tag{19}$$

$$\nabla_x T(Y,Z)=\frac{1}{3}\left[T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(Z,X))+T(Z,T(X,Y))\right]. \tag{20}$$

Из тождеств (11), (19) и первого тождества Бианки немедленно следует тождество (20). Применение предложения 4 завершает доказательство.

В заключении отметим, что двусторонние пространства составляют широкий класс. Они имеют непустое пересечение с А -проективно симметрическими пространствами, то есть пространствами, имеющими общие геодезические линии с сохранением канонического (аффинного) параметра с локально симметрическими многообразиями [6; 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабинин Л.В.* Одули, как новый подход к геометрии со связностью (Докл. АН СССР. 1977. – Т.233. - №5 – с.800 – 803.)
2. *Сабинин Л.В.* Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. (Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференцальной геометрии. Т.I. – М.: Наука. 1981 – с.293 – 339.
3. *Сабинин Л.В., Михеев П.О.* Теория гладких луп Бола. М.: Издательство УДН. 1985 – 81 с.
4. *Аквис М.А.* О геодезических лупах и локальных тройных системах пространств аффинной связности. (Сиб. Матем. ж. – 1978 – Т.19. - №2 – с.243 – 253)
5. *Картан Э.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства, сборник работ. – М.:ИЛ. 1949 – 384 с.
6. *Matveyev O., Nesterenko E.L.* On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. Webs and Quasigroups. Tver, 2002, pp. 78-85.
7. *Matveyev O., Nesterenko E.L.* The real prosymmetric spaces. Non – associative algebra and its applications. 2006, V.246, Ch. 19, pp.253-260.